

Primitives et équations différentielles

Les objectifs du chapitre

On introduit la notion d'équation différentielle sur des cas simples. Les élèves découvrent en situation le concept d'équation dont l'inconnue est une fonction.

- L'équation $y' = f$ est l'occasion de définir la notion de primitive. Par définition, la recherche d'une primitive est l'opération inverse de la dérivation, ce qui permet de traiter les cas usuels par lecture inverse du tableau des dérivées. Il est utile d'admettre ici que toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives, résultat qui est démontré dans la section sur le calcul intégral. On note aussi que, pour certaines fonctions, on ne dispose pas de primitive explicite.
- L'équation $y' = ay + b$ est l'occasion de réinvestir les propriétés de la fonction exponentielle. Lorsque $b = 0$, on remarque que la somme de deux solutions et le produit d'une solution par une constante sont encore solutions. Pour travailler le concept d'équation différentielle, on peut donner d'autres exemples d'équations différentielles, dont on peut donner des solutions sans en faire de résolution complète : $y' = y^2$, $y'' + w^2y = 0$. Aucune connaissance n'est exigible sur ces exemples.

I Généralités sur les équations différentielles

1. Introduction et motivations

Les équations différentielles sont omniprésentes en sciences (mécanique, chimie, biologie, économie, astronomie,...). Elles permettent de modéliser une situation physique.

Depuis Isaac Newton, on sait que modéliser un système physique peut se ramener à l'étude d'une équation différentielle, dont la résolution permet de prévoir l'évolution du système.

Le mathématicien Vladimir Arnold, un des plus grands spécialistes au monde de la théorie des équations différentielles, a écrit :

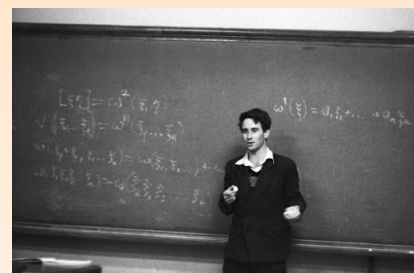
"les équations différentielles sont le pivot de la conception scientifique du monde".

Vladimir Arnould (1937-2010)

Vladimir Arnold, né en 1937 à Odessa en Ukraine et mort en 2010 à Paris, est un mathématicien russe. Il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens du XX^e siècle.

Arnold est célèbre pour sa résolution dans les années 50, avec son directeur de thèse Andreï Kolmogorov, du treizième problème de Hilbert. Il étudie durant sa thèse la stabilité du mouvement planétaire et résout rigoureusement le cas restreint des trois corps.

Arnold a obtenu de nombreux prix mathématiques dont le prix Crafoord en 1982 et le prix Wolf en 2001. Il ne reçoit pas la médaille Fields (la plus haute distinction en mathématiques) en 1974, dû à une opposition de l'URSS, même si les détails ne sont pas clairs.



2. Quelques exemples d'équations différentielles

► Le pendule simple

On considère le mouvement d'un pendule simple qui oscille dans un milieu où les forces de frottement sont inexistantes. Le pendule est constitué d'un objet ponctuel M de masse m, accroché par l'intermédiaire d'un fil rigide au point O fixe. On suppose le fil rigide sans masse. L'ensemble est plongé dans le champ de pesanteur terrestre uniforme. On écarte le fil d'un angle θ_0 de sa position d'équilibre et on le lâche sans vitesse initiale.

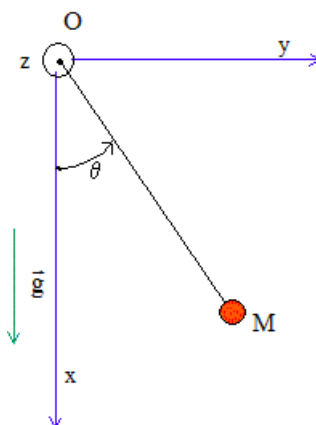
L'équation du pendule pour de **petites oscillations** (ce qui permet l'approximation $\sin \theta \approx \theta$) s'écrit

$$\theta'' + w^2 \theta = 0 \quad \text{avec} \quad w^2 = \frac{g}{\ell} \quad \text{et} \quad g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}.$$

La solution générale de cette équation s'écrit alors sous la forme

$$\theta(t) = A \sin(wt) + B \cos(wt) \quad \text{où } A \text{ et } B \text{ sont deux constantes.}$$

$\theta(t)$ représente l'écart entre la position du fil à l'instant t et la position d'équilibre.



► La radioactivité ^{14}C

Le carbone existe dans la nature sous les deux formes ^{12}C et ^{14}C . Ce dernier est présent en infime proportion.

Lorsqu'un échantillon animal ou végétal meurt, la quantité de carbone ^{14}C qu'il contient commence à décroître au fur et à mesure de la désintégration de ces atomes. Le nombre de désintégrations, par unité de temps, est proportionnel à la quantité d'atomes encore présents d'où l'équation différentielle

$$N'(t) = -\lambda N(t) \quad \text{où } \lambda \text{ est une constante réelle.}$$

$N(t)$ représente la quantité de ^{14}C restant dans l'organisme étudié à l'instant t . Cette équation différentielle est l'une des plus simples. La solution est une fonction exponentielle $N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$.

La solution de cette équation différentielle nous permet de déterminer la durée qui nous sépare de la mort de cet échantillon.



Les peintures des grottes de Lascaux en France ont pu être datées à 13500 ans avant Jésus-Christ grâce à la méthode de datation par le carbone 14.

3. Premières définitions

Définition 1 : équation différentielle

Une équation différentielle est une égalité exprimant une relation entre une fonction (l'inconnue) et ses dérivées.

Exemples

- $y' = 2y$ est une équation différentielle qui exprime une relation entre une fonction y et sa fonction dérivée y' : il s'agit d'une équation différentielle (linéaire à coefficients constants) du **premier ordre**.
- $y'' - 4y = 0$ est une équation différentielle qui exprime une relation entre une fonction y et sa fonction dérivée seconde y'' : il s'agit d'une équation différentielle (linéaire à coefficients constants) du **second ordre**.
- $y'(x) = \frac{1}{1+x^2}y(x)$ est une équation différentielle (linéaire à coefficients variables) du **premier ordre**. Pour simplifier, on la notera $y' = \frac{1}{1+x^2}y$.
- L'équation de Bessel $xy'' + y' + xy = 0$ est une équation différentielle (linéaire à coefficients variables) du **second ordre** qui intervient souvent en sciences physiques, par exemple dans l'étude des vibrations d'une membrane circulaire.

Définition 2 : solution d'une équation différentielle

On appelle solution sur un intervalle I d'une équation différentielle $\mathcal{E}$ toute fonction dérivable sur I et vérifiant l'égalité $\mathcal{E}$.

Ainsi, résoudre une équation différentielle revient à trouver toutes les fonctions solutions de l'équation.

Exemple

On considère le prototype des équations différentielles du premier ordre, à savoir l'équation différentielle $y' = y$.

On remarque que la fonction $x \mapsto e^x$ est solution sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle.

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour $y(x) = e^x$, on a $y'(x) = e^x$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y'(x) = y(x)$.

⚠ Les fonctions $x \mapsto ke^x$ où $k \in \mathbb{R}$ sont toutes des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = y$.

II Équation différentielle $y' = f$

1. Primitives d'une fonction

Définition 3 : primitive d'une fonction

On dit qu'un intervalle $\mathbb{R}$ est non réduit à un point (ou de longueur non nulle) s'il contient au moins deux points.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et soit f une fonction définie sur I .

On appelle **primitive** de f sur l'intervalle I toute fonction F définie et **dérivable** sur I et telle que $F' = f$.

Exemples

➤ La fonction $F : x \mapsto \frac{x^2}{2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto x$.

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \frac{1}{2} \times 2x = x$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$.

➤ La fonction $F : x \mapsto \ln x$ est une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

En effet, par définition de la fonction logarithme népérien, pour tout $x > 0$, $F'(x) = f(x)$.

Propriété 1 : existence de primitives (admise)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

- Toute fonction continue sur I admet des primitives sur cet intervalle.
- Deux primitives sur I d'une fonction f diffèrent d'une constante.

Exemple

les fonctions $F : x \mapsto \frac{x^3}{3}$ et $G : x \mapsto \frac{x^3}{3} + 5$ sont des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto x^2$ car

➤ $F'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 = x^2 = f(x)$

➤ $G'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 + 0 = x^2 = f(x)$.

Propriété 2 :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I (non réduit à un point) de primitives respectives F et G .

Alors $f + g$ et kf ($k \in \mathbb{R}$) admettent toutes deux des primitives sur I et on a

➤ $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I .

➤ kF est une primitive de kf sur I .

Méthode 1 : déterminer les primitives d'une fonction continue

Déterminer toutes les primitives de f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 3x^2 + e^x$.

Corrigé

La fonction f est continue sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ comme somme de fonctions continues, elle y admet donc des primitives.

► $x \mapsto x^3$ est une primitive de $x \mapsto 3x^2$ sur $]0 ; +\infty[$.

► $x \mapsto e^x$ est une primitive d'elle-même sur $]0 ; +\infty[$.

Il s'ensuit que les primitives de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$ sont données par

$$F(x) = x^3 + e^x + C \quad \text{où } C \in \mathbb{R}.$$

2. Primitives usuelles

f désigne une fonction définie et continue sur un intervalle I non réduit à un point et F une primitive sur I de f .

Fonction f	Une primitive F sur I	L'intervalle I
$f(x) = k$ (k constante réelle)	$F(x) = kx$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n \in \mathbb{N} \\ I =]-\infty ; 0[\text{ ou } I =]0 ; +\infty[& \text{si } n \leq -2 \end{cases}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$	$]0 ; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	$I =]-\infty ; 0[\text{ ou } I =]0 ; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0 ; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

3. Primitives de fonctions composées

u désigne une fonction dérivable sur un intervalle I non réduit à un point.

Fonction f	Une primitive F sur I	Condition sur u
$u' u^n \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	Si $n \leq -2$: $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$	Pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	Pour tout $x \in I$, $u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$	Pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$
$u' e^u$	e^u	Aucune condition

Méthode 2 : résolution d'une équation différentielle

Résoudre, sur $]0 ; +\infty[$, l'équation différentielle (E) : $y' = \frac{\ln(x)}{x}$.

Corrigé

On commence par déterminer une primitive de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

La fonction f est continue sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ comme quotient de deux fonctions continues avec un dénominateur non nul, elle y admet donc des primitives.

On pose pour tout $x > 0$, $u(x) = \ln(x)$. La fonction u est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ avec $u'(x) = \frac{1}{x}$.

Ainsi, pour tout $x > 0$, $f(x) = u'(x)u(x)$. Donc une primitive de f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ est la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{2}(u(x))^2$. Il s'ensuit que la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{2}\ln^2(x)$ est une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de f .

Par conséquent,

les solutions de (E) sur $]0 ; +\infty[$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2}\ln^2(x) + C$, où $C \in \mathbb{R}$.

On vérifie ensuite, que pour C fixée dans $\mathbb{R}$, la fonction y_C définie sur $]0 ; +\infty[$ par $y_C(x) = \frac{1}{2}\ln^2(x) + C$ est bien solution de l'équation différentielle (E).

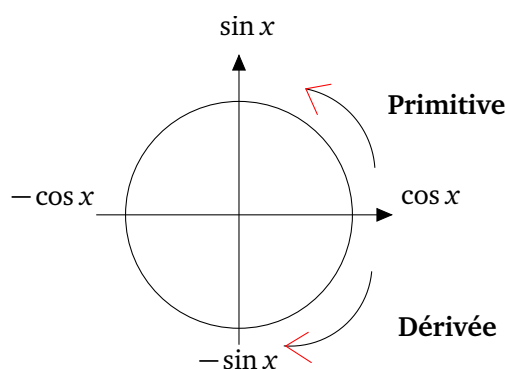
Pour tout $x > 0$,

$$y'_C(x) = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) + 0 = \frac{\ln(x)}{x}.$$

4. Primitives de fonctions trigonométriques

D'après le schéma ci-dessous,

- la fonction $x \mapsto -\cos x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \sin x$;
- la fonction $x \mapsto \sin x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \cos x$.



III Équation différentielle $y' = ay + b$

1. Équation différentielle $y' = ay$

Propriété 3 :

L'équation différentielle $(E_0) : y' = ay$ où $a \in \mathbb{R}^*$ a pour solutions les fonctions

$x \mapsto Ce^{ax}$ où C est une constante réelle.

Démonstration (exigible)

On raisonne par double implication.

- On fixe C dans $\mathbb{R}$ et on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = Ce^{ax}$.
La fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y'(x) = C \times ae^{ax} = ay(x).$$

Ainsi, y est solution sur $\mathbb{R}$ de (E_0) .

- Réciproquement, soit y une solution de (E_0) .
On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = y(x)e^{-ax}$.
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

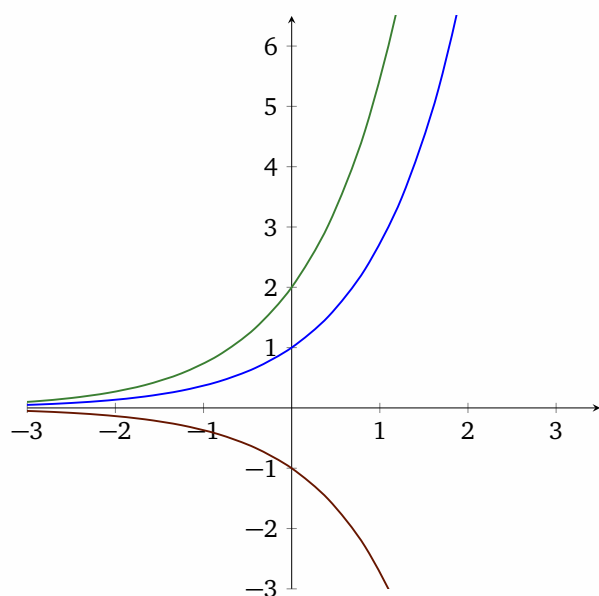
$$\begin{aligned} g'(x) &= y'(x)e^{-ax} - ay(x)e^{-ax} \\ g'(x) &= \left[\underbrace{y'(x) - ay(x)}_{=0 \text{ car } y \text{ est solution de } (E_0)} \right] e^{-ax} \\ g'(x) &= 0. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que g est une fonction constante. Il existe donc $C \in \mathbb{R}$, tel que $g(x) = C$, ou encore $y(x)e^{-ax} = C$. On conclut que $y(x) = Ce^{ax}$.

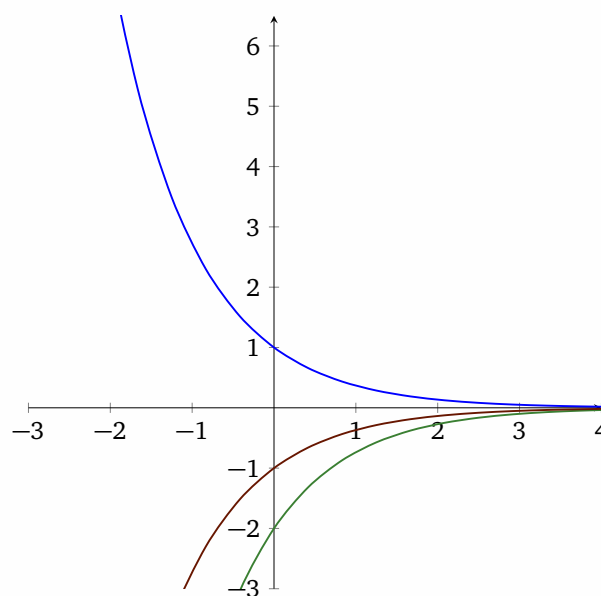
Exemples

- Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = y$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^x$, où C parcourt $\mathbb{R}$.
En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = Ce^x \Rightarrow y'(x) = Ce^x$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y'(x) = y(x)$.
- Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = -y$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-x}$, où C parcourt $\mathbb{R}$.
En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = Ce^{-x} \Rightarrow y'(x) = -Ce^{-x} = -y(x)$.

- Solutions de l'équation $y' = y$



- Solutions de l'équation $y' = -y$



2. Équation différentielle $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$

Propriété 4 :

L'équation différentielle $y' = ay + b$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ a pour solutions les fonctions

$$x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a} \text{ où } C \text{ est une constante réelle.}$$

Exemple

l'équation différentielle $y' = \pi y - 2$ a pour solutions les fonctions $x \mapsto Ce^{\pi x} + \frac{2}{\pi}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

IV Exercices

Exercice 1 Primitive d'une fonction de la forme $u'e^u$

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes.

1. $f_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 4e^{5x} \end{array}$

3. $f_3 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 4xe^{x^2} \end{array}$

2. $f_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{\frac{x}{2}} \end{array}$

4. $f_4 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (x^2 + 2)e^{x^3 + 6x + 5} \end{array}$

Exercice 2 Primitive d'une fonction de la forme $u'u^n$

Déterminer une primitive sur l'intervalle I de chacune des fonctions suivantes.

1. $f_1 : \begin{array}{l} I = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 3(x+3)^4 \end{array}$

3. $f_3 : \begin{array}{l} I = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x(1+x^2)^{-5} \end{array}$

2. $f_2 : \begin{array}{l} I = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 6(x+1)(x^2+2x+3)^3 \end{array}$

4. $f_4 : \begin{array}{l} I =]0 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{2 \ln x}{x} \end{array}$

Exercice 3 Primitive d'une fonction de la forme u'/u

Déterminer une primitive sur l'intervalle I de chacune des fonctions suivantes.

1. $f_1 : \begin{array}{l} I = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{e^x}{e^x + 3} \end{array}$

3. $f_3 : \begin{array}{l} I = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{2x+3}{x^2+3x+4} \end{array}$

2. $f_2 : \begin{array}{l} I = \left] \frac{2}{3} ; +\infty \right[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{3}{3x-2} \end{array}$

4. $f_4 : \begin{array}{l} I =]1 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x \ln x} \end{array}$

Exercice 4 Primitive d'une fonction de la forme u'/u^2

Déterminer une primitive sur l'intervalle I de chacune des fonctions suivantes.

1. $f_1 : \begin{array}{l} I = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{2x}{(x^2+3)^2} \end{array}$

3. $f_3 : \begin{array}{l} I = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{e^{3x}}{(e^{3x}+1)^2} \end{array}$

2. $f_2 : \begin{array}{l} I = \left] \frac{2}{3} ; +\infty \right[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{3}{(3x-2)^2} \end{array}$

4. $f_4 : \begin{array}{l} I = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x}{(3x^2+5)^2} \end{array}$

Exercice 5 Primitive d'une fonction de la forme $u'/\sqrt{u}$

Déterminer une primitive sur l'intervalle I de chacune des fonctions suivantes.

$$1. f_1 : \begin{array}{l} I = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{array}$$

$$3. f_3 : \begin{array}{l} I =]1 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} \end{array}$$

$$2. f_2 : \begin{array}{l} I = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+4}} \end{array}$$

$$4. f_4 : \begin{array}{l} I = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{e^{5x}}{\sqrt{e^{5x}+2}} \end{array}$$

Exercice 6 Calcul de primitives

Déterminer une primitive sur l'intervalle I de chacune des fonctions suivantes..

$$1. f_1 : \begin{array}{l} I = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 3x^2 + 2x + 1 \end{array}$$

$$3. f_3 : \begin{array}{l} I = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{2x}{x^2+1} \end{array}$$

$$2. f_2 : \begin{array}{l} I =]0 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{4}{x} + 3x \end{array}$$

$$4. f_4 : \begin{array}{l} I =]0 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{\ln x}{x} + e^x \end{array}$$

Exercice 7 Primitives d'une fonction rationnelle

On considère la fonction f définie sur $]1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$$

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que pour tout $x > 1$, on ait

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}$$

2. En déduire les primitives sur $]1 ; +\infty[$ de la fonction f .

Exercice 8 Équation différentielle du type $y' = ay$

On considère l'équation différentielle suivante

$$(\mathcal{E}) : -3y' + 2y = 0$$

- Déterminer les solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$.
- En déduire la solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ qui vérifie $f(0) = 2$.
- Donner la solution g sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ qui vérifie $g'(1) = e^{\frac{2}{3}}$.

Exercice 9 Problème de Cauchy

L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation différentielle avec condition initiale suivante

$$\begin{cases} y' = \ln(x) \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

Pour cela, on définit sur $]0 ; +\infty[$ la fonction f par $f(x) = \ln(x)$.

1. Montrer que la fonction F définie sur $]0 ; +\infty[$ par $F(x) = x \ln(x) - x$ est une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$.

2. Condition nécessaire : unicité

On suppose que F est une solution du système de départ. Montrer que pour tout $x > 0$

$$F(x) = x \ln(x) - x + 4$$

3. Condition suffisante : existence

Montrer que la fonction F obtenue dans la question précédente vérifie bien l'équation différentielle $y' = \ln(x)$ avec la condition initiale (dite condition de Cauchy) $F(1) = 3$.

Exercice 10 Résolution d'une équation différentielle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{5}{2}e^{-2x} - 2e^{-3x}.$$

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 2e^{-3x}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.
2. En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{5}{2}e^{-2x}$ est solution de (E').
3. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2e^{-3x}$ est solution de l'équation (E).
4. En remarquant que $f = g + h$, montrer que f est une solution de (E).

Exercice 11 Chute libre d'un corps

On suppose qu'un corps M de masse m chute du haut d'une tour sans vitesse initiale et en l'absence de résistance de l'air (vide).

La seule force non négligeable exercée sur le corps M est son poids $m\vec{g}$ où $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

Le principe fondamental de la dynamique, appelé aussi deuxième loi de Newton, stipule que :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}$$

On admet les relations suivantes

$$a(t) = v'(t) \quad \text{et} \quad v(t) = x'(t)$$

où

- $a(t)$ est l'accélération du corps M à l'instant t ;
- $v(t)$ est la vitesse du corps M à l'instant t ;
- $x(t)$ est la position du corps M à l'instant t .

Histoire des maths

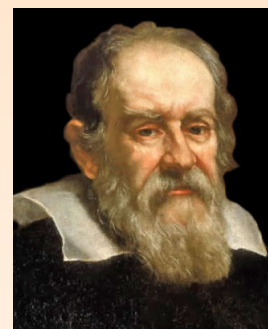
Galilée est un physicien, astronome et écrivain italien, né à Pise en 1564. Il découvre la loi de la chute des corps dans le vide. Il introduit l'emploi de la lunette en astronomie ce qui est une révolution dans l'observation de l'Univers. Il découvre ainsi le relief de la Lune et les principaux satellites de Jupiter.

Galilée est connu pour s'être rallié au système héliocentrique de Copernic. Il est par la suite condamné par le tribunal de l'Inquisition et obligé de se rétracter en 1633. Il ne sera réhabilité par l'Église qu'en 1992 !

Galilée réfute complètement tous les principes scientifiques et philosophiques d'Aristote, le penseur le plus influent de la Grèce antique.

Galilée postule que tous les objets tombent avec une accélération constante en l'absence d'air et d'autre force de frottement.

Il construit une nouvelle physique et développe le raisonnement scientifique moderne, basé sur l'imbrication entre les expériences et les analyses mathématiques.



1. En projetant la relation $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}$ sur l'axe orienté vers le bas (Ox), montrer que

$$\text{pour tout } t \geq 0 \quad v(t) = gt$$

2. Que vaut la vitesse $v(1)$ du corps M après une seconde de chute ?

3. On suppose que la hauteur de la tour est égale à 50 m. On pose $x(0) = 0$.

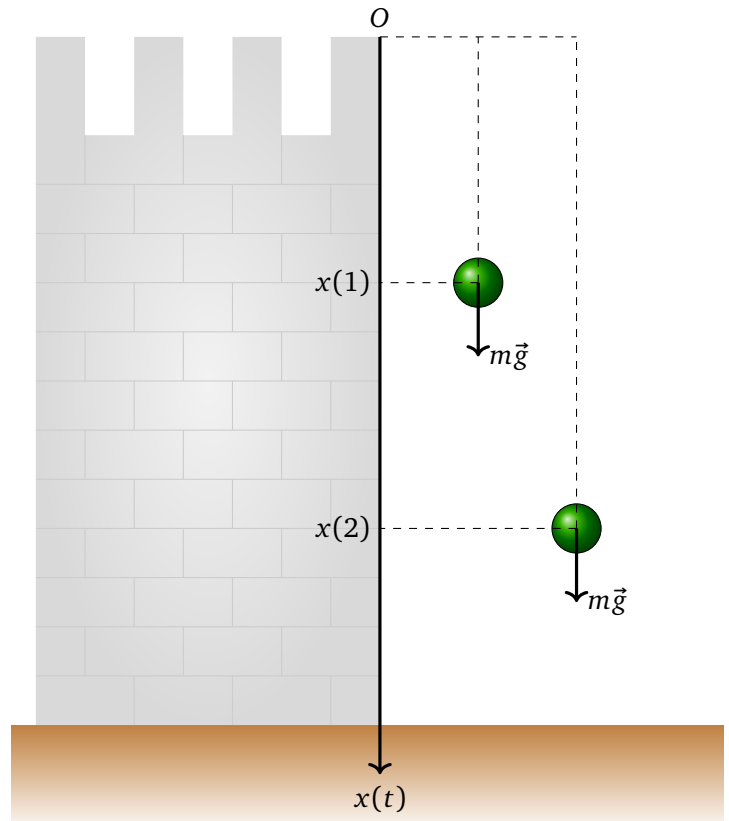
(a) Montrer que pour tout $t \geq 0$, $x(t) = \frac{1}{2}gt^2$.

- (b) À quelle hauteur du sol se trouve le corps M après 2 secondes de chute ?

- (c) Déterminer la durée de la chute du corps M.

4. **Expérience d'Apollo 15** : en 1971, l'astronaute américain David Scott lâche deux objets simultanément à 1,6 m du sol de la lune (absence de l'atmosphère) : un marteau en aluminium (de 1,32 kg) tenu dans sa main droite et une plume de faucon (de 0,03 kg) dans la gauche.

Quel objet touche en premier le sol ?



Exercice 12

Chute d'un corps avec résistance de l'air

Un objet ponctuel M de masse m chute verticalement et sans vitesse initiale. Il est soumis essentiellement à deux forces :

- son poids $m\vec{g}$ où $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$;
- une force de résistance de l'air $-k\vec{v}$, où k est une constante strictement positive.

L'axe du déplacement est orienté vers le bas. D'après le principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{g} - k\vec{v} = m\vec{a}$$

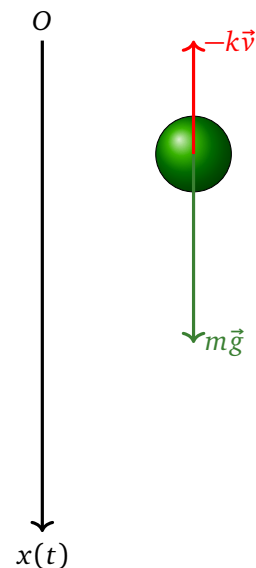
1. Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a

$$v'(t) = -\frac{k}{m}v(t) + g$$

2. En déduire que la solution de cette équation différentielle est donnée par

$$v(t) = \frac{gm}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$$

3. Que vaut $v_{\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)$, la vitesse limite de la chute de l'objet M ?



Exercice 13

Loi de refroidissement de Newton

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.

Une tasse de café est servie à une température initiale de 80°C dans un milieu dont la température est notée M .

Le but de cet exercice est d'étudier le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton suivant en résolvant une équation différentielle.

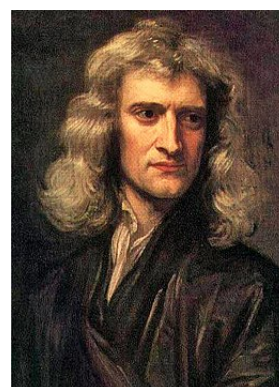
Dans l'exercice 16 du chapitre 1, ce problème a été étudié à l'aide d'une suite.

Pour tout réel t positif ou nul, on note $\theta(t)$ la température du café à l'instant t , avec $\theta(t)$ exprimée en degré Celsius et t en minute. On a ainsi $\theta(0) = 80$.

On suppose que θ est une fonction dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et que, pour tout réel t de cet intervalle, la loi de Newton se modélise par l'égalité :

$$\theta'(t) = -0,2(\theta(t) - M).$$

Dans la suite du problème, on choisit $M = 0$. On cherche alors une fonction θ dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ vérifiant $\theta(0) = 80$ et, pour tout réel t de cet intervalle : $\theta'(t) = -0,2\theta(t)$.



Isaac Newton
1642-1727

1. Si θ est une telle fonction, on pose pour tout t de l'intervalle $[0; +\infty[$, $f(t) = \frac{\theta(t)}{e^{-0,2t}}$.

Montrer que la fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et que, pour tout réel t de cet intervalle, $f'(t) = 0$.

2. En conservant l'hypothèse du 1., calculer $f(0)$.

En déduire, pour tout t de l'intervalle $[0; +\infty[$, une expression de $f(t)$, puis de $\theta(t)$.

3. Vérifier que la fonction θ trouvée en 2. est solution du problème.

Exercice 14

Dynamique des populations 1

Au début du XX^e siècle, l'Afrique comptait entre trois et cinq millions d'éléphants. Ils seraient aujourd'hui moins de 400 000.

Les éléphants d'Afrique sont en danger d'extinction. En cause : « La demande persistante d'ivoire et les pressions humaines croissantes sur les terres sauvages du continent. »

Plusieurs parcs nationaux ont vu le jour en Afrique. Il s'agit avant tout d'espaces protégés créés pour sauvegarder des patrimoines naturels et culturels reconnus comme exceptionnels.

Au Tchad, le parc national de Zakouma compte aujourd'hui 500 éléphants.



Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution de la population de ce parc suivant deux modèles biologiques. Dans toute la suite on note :

- $n(t)$ le nombre d'éléphants à l'instant t (t est en années) ;
- $r > 0$ la croissance intrinsèque de cette population ;
- $K > 0$ la capacité biotique, c'est-à-dire la taille idéale pour la population en respectant le reste de l'écosystème.

Partie A : le modèle de Malthus

Le modèle de Malthus (en hommage à l'économiste britannique Thomas Malthus) repose sur l'équation différentielle suivante

$$n'(t) = rn(t)$$

1. Donner la solution de cette équation différentielle avec $r = 0,15$ et la condition initiale $n(0) = 500$.
2. Compléter le tableau suivant (arrondir à l'unité) :

t en années	0	1	2	3	4	5	99
$n(t)$	500						

3. Des études scientifiques estiment qu'il faudrait environ un siècle aux éléphants de la forêt pour rétablir leur population. Que peut-on dire de $n(99)$?

Partie B : le modèle de Verhulst

Le modèle précédent a été amélioré vers 1840 par le mathématicien belge Pierre François Verhulst en considérant un facteur de mortalité en plus de la croissance intrinsèque r . Ce modèle repose sur l'équation différentielle

$$(E_1) : n'(t) = rn(t) \left(1 - \frac{n(t)}{K} \right)$$

On admet que si $n(0) > 0$ alors $n(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$.

1. Montrer que l'équation (E_1) est équivalente à $(E_2) : \frac{n'(t)}{n^2(t)} = r \left(\frac{1}{n(t)} - \frac{1}{K} \right)$.

2. On pose pour tout $t \geq 0$, $y(t) = \frac{1}{n(t)} - \frac{1}{K}$.

Montrer que n est solution sur $\mathbb{R}_+$ de (E_2) si, et seulement si, y est solution sur $\mathbb{R}_+$ de $(F) : y'(t) = -ry(t)$.

3. Donner la solution de l'équation différentielle (F) . On rappelle que $n(0) = 500$.
4. En déduire que pour tout $t \geq 0$

$$n(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{500} - 1 \right) e^{-rt}}$$

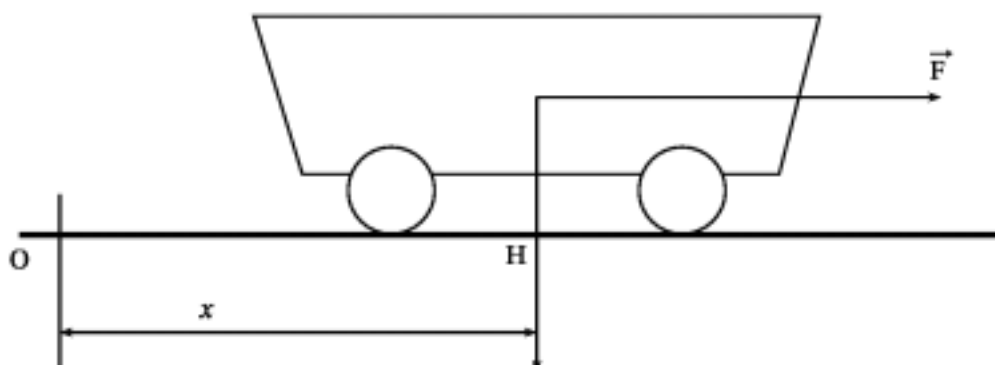
5. On prend $K = 7\,500$ et $r = 0,15$. Compléter le tableau suivant (arrondir à l'unité) :

t en années	0	1	2	3	4	5	99
$n(t)$	500						

6. Que vaut $n_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} n(t)$?

Exercice 15 Modélisation

Un chariot de masse 200 kg se déplace sur une voie rectiligne et horizontale. Il est soumis à une force d'entraînement constante $\vec{F}$ de valeur 50 N. Les forces de frottement sont proportionnelles à la vitesse et de sens contraire ; le coefficient de proportionnalité a pour valeur absolue $25 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}$.



La position du chariot est repérée par la distance x , en mètres, du point H à l'origine O du repère en fonction du temps t , exprimé en secondes. On prendra t dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Les lois de Newton conduisent à l'équation différentielle

$$(E) \quad 25x' + 200x'' = 50,$$

où

- x' est la dérivée de x par rapport au temps t ;
- x'' est la dérivée seconde de x par rapport au temps t .

1. On note $v(t)$ la vitesse du chariot au temps t et on rappelle que $v(t) = x'(t)$.

Prouver que x est solution de (E), si et seulement si, x' est solution de l'équation différentielle

$$(F) \quad v' = -\frac{1}{8}v + \frac{1}{4}.$$

Résoudre l'équation différentielle (F).

2. On suppose que, à l'instant $t = 0$, on a : $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$.

(a) Calculer, pour tout nombre réel t positif, $x'(t)$.

(b) En déduire que l'on a, pour tout nombre réel t positif,

$$x(t) = 2t - 16 + 16e^{-\frac{t}{8}}.$$

3. Calculer $V = \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)$.

Pour quelles valeurs de t la vitesse du chariot est-elle inférieure ou égale à 90 % de sa valeur limite V ?

4. Quelle est la distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes ?

On exprimera cette distance en mètres, au décimètre près.

Exercice 16

Dynamique des populations 2

Une colonie de 2000 bactéries est placée dans une enceinte close dont le milieu nutritif est renouvelé en permanence.

On admet que l'évolution en fonction du temps t en heure ($t \geq 0$) du nombre d'individus $N(t)$ de cette colonie suit l'équation différentielle

$$(E) : N'(t) = 3N(t) - 0,005N^2(t).$$

Pour déterminer $N(t)$, on se propose de remplacer (E) par une équation différentielle plus simple, puis de la résoudre.

1. On suppose que la fonction N ne s'annule pas sur $[0 ; +\infty[$ et on définit sur $[0 ; +\infty[$ la fonction g par

$$g(t) = \frac{1}{N(t)}.$$

Déterminer $g'(t)$.

2. Montrer que N est solution de (E) si, et seulement si, g est solution de $(E') : y' = -3y + 0,005$.

3. Résoudre (E') , puis résoudre (E).

4. (a) Déterminer la solution de (E) vérifiant la condition initiale indiquée dans l'énoncé.
(b) Calculer le nombre de bactéries présentes au bout de deux heures. Arrondir à l'unité.

V Test de fin de chapitre

Pour chaque question du Q.C.M suivant, choisir la bonne réponse.

1. La fonction F définie sur $]0 ; +\infty[$ par $F(x) = x \ln(x) - x$ est une primitive de la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par

☐ a) $x \mapsto \ln(x)$

☐ c) $x \mapsto x^2 \ln(x)$

☐ b) $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$

☐ d) $x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

2. Une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4(2x + 1)^3$ est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

☐ a) $F(x) = 4(2x + 1)^4$

☐ c) $F(x) = (2x + 1)^4$

☐ b) $F(x) = \frac{1}{3}(2x + 1)^2$

☐ d) $F(x) = \frac{1}{2}(2x + 1)^4$

3. Une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 6(x^2 + x + 1)e^{2x^3+3x^2+6x+\sqrt{2}}$ est la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par :

☐ a) $G(x) = 6(x^2 + x + \sqrt{2})e^{2x^3+3x^2+6x+\sqrt{2}}$

☐ c) $G(x) = 6x^2e^{2x^3+3x^2+6x+\sqrt{2}}$

☐ b) $G(x) = e^{2x^3+3x^2+6x+\sqrt{2}}$

☐ d) $G(x) = 6e^{2x^3+3x^2+6x+\sqrt{2}}$

4. Une primitive de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{5e^x}{e^x + 5}$ est la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par :

☐ a) $H(x) = \ln(e^x + 5)$

☐ c) $H(x) = 5 \ln(e^x + 5)$

☐ b) $H(x) = \sqrt{5} \ln(e^x + 5)$

☐ d) $H(x) = \ln(e^x + 1)$

5. Une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $i(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x} + 3)^2}$ est la fonction I définie sur $\mathbb{R}$ par :

☐ a) $I(x) = \frac{-1}{2(e^{2x} + 3)}$

☐ c) $I(x) = \frac{-1}{2(e^{2x} + 3)^2}$

☐ b) $I(x) = \frac{2}{(e^{2x} + 3)^2}$

☐ d) $I(x) = \frac{-2}{(e^{2x} + 3)^2}$

6. La solution f de l'équation différentielle $y' = 3y$ telle que $f(0) = 1$ est :

☐ a) $f(x) = e^{3y}$

☐ c) $f(x) = 3e^{3x}$

☐ b) $f(x) = e^{3x}$

☐ d) $f(x) = 3e^{3y}$

VI Corrigé des exercices

Exercice 1 Primitive d'une fonction de la forme $u'e^u$

On rappelle que si une fonction f est définie sur I de $\mathbb{R}$ non réduit à un point par $f(x) = e^{u(x)}$ alors la fonction F définie sur I par $F(x) = u'(x)e^{u(x)}$ en est une primitive sur I .

1. On a

$$f_1(x) = 4 \times e^{5x} = 4 \times \frac{1}{5} \times \underbrace{5e^{5x}}_{u'e^u}$$

Une primitive de f_1 sur $\mathbb{R}$ est donnée par

$$F_1(x) = \frac{4}{5}e^{5x}$$

2. On a

$$f_2(x) = e^{\frac{x}{2}} = 2 \times \frac{1}{2} \underbrace{e^{\frac{x}{2}}}_{=u'e^u}$$

Une primitive de f_2 sur $\mathbb{R}$ est donnée par

$$F_2(x) = 2e^{\frac{x}{2}}$$

3. On a

$$f_3(x) = 4xe^{x^2} = 2 \times \underbrace{2x \times e^{x^2}}_{u'e^u}$$

Une primitive de f_3 sur $\mathbb{R}$ est donnée par

$$F_3(x) = 2e^{x^2}$$

4. On a $f_4(x) = (x^2 + 2)e^{x^3+6x+5}$. En posant $u(x) = x^3 + 6x + 5$ alors $u'(x) = 3x^2 + 6 = 3(x^2 + 2)$.

Ainsi $f_4(x) = \frac{1}{3} \times u'(x)e^{u(x)}$ et une primitive sur $\mathbb{R}$ est donnée par

$$F_4(x) = \frac{1}{3}e^{x^3+6x+5}$$

Exercice 2 Primitive d'une fonction de la forme $u'u^n$

1. Pour tout nombre réel x on pose $u(x) = x + 3$. Donc $u'(x) = 1$ et $f_1(x) = 3 \times u'(x) \times (u(x))^4$.

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de f_1 alors définie par $F_1(x) = \frac{3}{4+1}(u(x))^{4+1}$.

Autrement dit, une primitive de f_1 sur $\mathbb{R}$ est donnée par

$$F_1(x) = \frac{3}{5}(x+3)^5$$

2. Pour tout nombre réel x on pose $u(x) = x^2 + 2x + 3$. Donc $u'(x) = 2x + 2 = 2(x + 1)$ et $f_2(x) = 3 \times u'(x) \times (u(x))^3$.

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de f_2 est alors définie par $F_2(x) = \frac{3}{3+1} (u(x))^{3+1}$.

Autrement dit, une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_2 est donnée par

$$F_2(x) = \frac{3}{4} (x^2 + 2x + 3)^4$$

3. Pour tout nombre réel x on pose $u(x) = 1 + x^2$. On a donc $u'(x) = 2x$ et

$$f_3(x) = \frac{1}{2} \times 2x \times (1 + x^2)^{-5} = \frac{1}{2} \times u'(x) \times u(x)^{-5}.$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_3 est alors définie par $F_3(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{-5+1} \times (u(x))^{-5+1}$

Autrement dit, une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_3 est donnée par

$$F_3(x) = \frac{-1}{8} (1 + x^2)^{-4}$$

4. Pour tout nombre réel $x > 0$ on pose $u(x) = \ln(x)$. On a donc pour $x > 0$, $u'(x) = \frac{1}{x}$.

Ainsi, pour tout $x > 0$, $f_4(x) = 2 \times \ln(x) \times \frac{1}{x} = 2 \times u'(x) \times u(x)$.

Ainsi une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction f_4 est définie par $F_4(x) = 2 \times \frac{1}{2} \times (u(x))^2$.

Autrement dit, une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction f_4 est donnée par

$$F_4(x) = \ln^2(x)$$

Exercice 3

Primitive d'une fonction de la forme u'/u

On rappelle que si une fonction f est définie sur I de $\mathbb{R}$ non réduit à un point par $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ où la fonction u est à valeurs strictement positives sur I , alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \ln(u(x))$ en est une primitive sur I .

1. On pose $u(x) = e^x + 3$. La fonction u est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = e^x$.

$$\text{Ainsi } f_1(x) = \frac{e^x}{e^x + 3} = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_1 est donnée par

$$F_1(x) = \ln(e^x + 3)$$

2. On pose $u(x) = 3x - 2$. On a bien $u(x) > 0$ sur I et de plus $u'(x) = 3$.

$$\text{Ainsi } f_2(x) = \frac{3}{3x - 2} = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Donc une primitive sur $\left] \frac{2}{3} ; +\infty \right[$ de la fonction f_2 est donnée par

$$F_2(x) = \ln(3x - 2)$$

3. On pose $u(x) = x^2 + 3x + 4$. Vérifions d'abord que $u(x) > 0$ pour tout nombre réel x .

$x^2 + 3x + 4$ est un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = -7 < 0$. Ce trinôme ne possède donc aucune racine. De plus, son coefficient de plus haut degré est strictement positif. Il s'ensuit que pour tout nombre réel x , $x^2 + 3x + 4 > 0$.

Par ailleurs $u'(x) = 2x + 3$. Ainsi $f_3(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+4} = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_3 est donnée par

$$F_3(x) = \ln(x^2 + 3x + 4)$$

4. Pour tout $x > 1$, on pose $u(x) = \ln(x)$. On a bien $u(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$ et $u'(x) = \frac{1}{x}$.

Ainsi, pour tout $x > 1$, $f_4(x) = \frac{1}{x \ln(x)} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Donc une primitive sur $]1; +\infty[$ de la fonction f_4 est donnée par

$$F_4(x) = \ln(\ln(x))$$

Exercice 4 Primitive d'une fonction de la forme u'/u^2

On rappelle que si une fonction f est définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non réduit à un point par $f(x) = \frac{u'(x)}{u^2(x)}$ où la fonction u **ne s'annule pas** sur I , alors la fonction F définie sur I par $F(x) = -\frac{1}{u(x)}$ en est une primitive sur I .

1. On pose $u(x) = x^2 + 3$. La fonction u est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x$.

Ainsi pour tout nombre réel x , on a $f_1(x) = \frac{2x}{(x^2+3)^2} = \frac{u'(x)}{u^2(x)}$.

Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_1 est donnée par

$$F_1(x) = -\frac{1}{x^2 + 3}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$, on pose $u(x) = 3x - 2 \neq 0$. On a donc $u'(x) = 3$.

Ainsi, pour tout $x \neq \frac{2}{3}$, $f_2(x) = \frac{3}{(3x-2)^2} = \frac{u'(x)}{u^2(x)}$.

Donc une primitive sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$ de la fonction f_2 est donnée par

$$F_2(x) = -\frac{1}{3x - 2}$$

3. Pour tout nombre réel x , on pose $u(x) = e^{3x} + 1 > 0$. On a $u'(x) = 3e^{3x}$.

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_3(x) = \frac{e^{3x}}{(e^{3x} + 1)^2} = \frac{1}{3} \times \frac{3e^{3x}}{(e^{3x} + 1)^2} = \frac{1}{3} \times \frac{u'(x)}{u^2(x)}$.

Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_3 est donnée par

$$F_3(x) = -\frac{1}{3(e^{3x} + 1)}$$

4. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = 3x^2 + 5 > 0$. On a alors $u'(x) = 6x$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_4(x) = \frac{x}{(3x^2+5)^2} = \frac{1}{6} \times \frac{6x}{(3x^2+5)^2} = \frac{1}{6} \times \frac{u'(x)}{u^2(x)}$

Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_4 est donnée par

$$F_4(x) = -\frac{1}{6(3x^2 + 5)}$$

Exercice 5 Primitive d'une fonction de la forme $u' / \sqrt{u}$

On rappelle que si une fonction f est définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non réduit à un point par $f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ où la fonction u est à valeurs strictement positives sur I , alors la fonction F définie sur I par $F(x) = 2\sqrt{u(x)}$ en est une primitive sur I .

1. On pose $u(x) = x^2 + 1 > 0$, on a donc $u'(x) = 2x$ et

$$f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

Il s'ensuit qu'une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_1 est donnée par

$$F_1(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

2. On pose $u(x) = x^2 + 3x + 4$. Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) > 0$.
 u est une fonction polynôme du second degré de discriminant $\Delta = -7 < 0$ et de coefficient dominant $1 > 0$.
D'après le cours sur les fonctions du second degré, pour tout $x > 0$, $u(x) > 0$.

Par ailleurs $u'(x) = 2x + 3$. Il s'ensuit que $f_2(x) = 2 \times \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_2 est donc donnée par

$$F_2(x) = 2\sqrt{x^2 + 3x + 4}$$

3. Pour $x > 1$, on pose $u(x) = \ln(x)$. On a donc $u(x) > 0$ et $u'(x) = \frac{1}{x}$.
Donc pour tout $x > 1$, on a

$$f_3(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}} = \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{\ln(x)}} = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$$

Par conséquent une primitive sur $]1; +\infty[$ de la fonction f_3 est donnée par

$$F_3(x) = 2\sqrt{\ln(x)}$$

4. Pour tout nombre réel x , on pose $u(x) = e^{5x} + 2$. On a donc $u(x) > 0$ et $u'(x) = 5e^{5x}$.
Donc pour tout réel x , on a

$$f_4(x) = \frac{e^{5x}}{\sqrt{e^{5x} + 2}} = \frac{1}{5} \times \frac{5e^{5x}}{\sqrt{e^{5x} + 2}} = \frac{1}{5} \times \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$$

Il en résulte qu'une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_4 est donnée par

$$F_4(x) = \frac{2}{5} \sqrt{e^{5x} + 2}$$

Exercice 6 Calcul de primitives

Les fonctions étudiées sont toutes continues sur leur intervalle de définition : elles y admettent des primitives.

1. Des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_1 définies par $f_1(x) = 3x^2 + 2x + 1$ sont données par

$$F_1(x) = x^3 + x^2 + x + C \quad \text{où } C \in \mathbb{R}.$$

2. Des primitives sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction f_2 définies par $f_2(x) = \frac{4}{x} + 3x$ sont données par

$$F_2(x) = 4\ln(x) + \frac{3}{2}x^2 + C \quad \text{où } C \in \mathbb{R}.$$

3. Des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_3 définies par $f_3(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ sont données par

$$F_3(x) = \ln(x^2 + 1) + C \quad \text{où } C \in \mathbb{R}.$$

4. Des primitives sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction f_4 définies par $f_4(x) = \frac{\ln(x)}{x} + e^x$ sont données par

$$F_4(x) = \frac{1}{2}(\ln(x))^2 + e^x + C \quad \text{où } C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7 Primitives d'une fonction rationnelle

1. Pour tout $x > 1$

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} = \frac{a(x-1) + bx}{x(x-1)} = \frac{(a+b)x - a}{x(x-1)} = \frac{1}{x(x-1)}$$

Par identification, on obtient que $a + b = 0$ et $-a = 1$. Par conséquent $b = 1$ et

$$\text{pour tout } x > 1, \quad f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$$

2. Les primitives sur $]1 ; +\infty[$ de la fonction f sont données par

$$F(x) = -\ln(x) + \ln(x-1) + C \quad \text{où } C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 8 Équation différentielle du type $y' = ay$

1. y est solution de $(\mathcal{E}) \Leftrightarrow -3y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{2}{3}y$.

Donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{\frac{2}{3}x}$ avec C constante réelle, sont les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$.

2. Soit f une solution de $(\mathcal{E})$. D'après la question précédente, f est de la forme $f(x) = Ce^{\frac{2}{3}x}$ où C est une constante réelle.

On a donc $f(0) = 2 \Leftrightarrow Ce^0 = 2 \Leftrightarrow C = 2$ car $e^0 = 1$.

Par conséquent la seule solution $(\mathcal{E})$ vérifiant $f(0) = 2$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{\frac{2}{3}x}$.

3. On a $g(x) = Ce^{\frac{2}{3}x}$ où C est une constante réelle.

De plus la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout nombre réel x : $g'(x) = \frac{2}{3}Ce^{\frac{2}{3}x}$. Ainsi

$$g'(1) = e^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \frac{2}{3}Ce^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \frac{2}{3}C = 1 \Leftrightarrow C = \frac{3}{2}.$$

Il en résulte que la solution recherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto \frac{3}{2}e^{\frac{2}{3}x}$.

Exercice 9 Problème de Cauchy

1. La fonction F est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et on a pour tout $x > 0$

$$F'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) = f(x).$$

Donc F est bien une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction logarithme népérien.

2. Les solutions sur $]0 ; +\infty[$ de l'équation différentielle $y' = \ln(x)$ sont les fonctions

$$F_k(x) = x \ln(x) - x + k \text{ où } k \text{ est une constante réelle.}$$

Or $y(1) = 3$ ce qui nous donne $1 \times \underbrace{\ln(1)}_{=0} - 1 + k = 3$ ou encore $k = 4$.

Par conséquent la fonction $F : x \mapsto x \ln(x) - x + 4$ est solution sur $]0 ; +\infty[$ de

$$\begin{cases} y' = \ln(x) \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

3. La fonction F est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $F'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} + 0 = \ln(x)$

$$\text{De plus } F(1) = 1 \times \ln(1) - 1 + 4 = 3.$$

Par conséquent la fonction F est bien solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = \ln(x) \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

Exercice 10 Résolution d'une équation différentielle

1. L'équation différentielle (E') est équivalente à

$y' = -2y$ dont les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{-2x}$ avec k décrivant $\mathbb{R}$.

2. En prenant $k = \frac{5}{2}$, on voit bien que la fonction h appartient à l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E') . Autrement dit, h est solution sur $\mathbb{R}$ de (E') .

3. La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x , $g'(x) = 6e^{-3x}$. Donc pour tout nombre réel x

$$g'(x) + 2g(x) = 6e^{-3x} - 4e^{-3x} = 2e^{-3x}$$

Ainsi la fonction g est bien solution sur $\mathbb{R}$ de (E) .

4. On a $f = g + h$ donc $f' = g' + h'$.

Pour tout nombre réel x

$$\begin{aligned} f'(x) + 2f(x) &= g'(x) + h'(x) + 2g(x) + 2h(x) \\ &= \underbrace{g'(x) + 2g(x)}_{=2e^{-3x}} + \underbrace{h'(x) + 2h(x)}_{=0} = 2e^{-3x} \end{aligned}$$

Donc la fonction f est bien solution sur $\mathbb{R}$ de (E) .

Exercice 11 Chute libre d'un corps

1. D'après le principe fondamental de la dynamique

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \quad \text{donc} \quad m\vec{g} = m\vec{a}$$

On obtient donc $\vec{g} = \vec{a}$ car $m \neq 0$.

On projette ensuite cette relation sur l'axe (Ox) et on trouve $a(t) = v'(t) = g$.

Les primitives sur $[0 ; +\infty[$ de la fonction constante $t \mapsto g$ sont les fonctions $t \mapsto gt + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Or $v(0) = 0$ car la chute a lieu sans vitesse initiale. Ainsi, pour tout $t \geq 0$ $v(0) = g \times 0 + C = 0$, ce qui donne $C = 0$.

Par conséquent

$$\text{pour tout } t \geq 0 \quad v(t) = gt$$

2. On a $v(1) = g \times 1$, ainsi

$$v(1) = 9,8 \text{ m.s}^{-1}$$

3. (a) Pour tout $t \geq 0$, $v(t) = x'(t) = gt$.

Or les primitives sur $[0 ; +\infty[$ de la fonction $t \mapsto gt$ sont les fonctions $t \mapsto \frac{1}{2}gt^2 + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

Ainsi, pour tout $t \geq 0$, $x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + C$.

De plus $x(0) = 0 = \frac{1}{2} \times 0^2 + C$ donc $C = 0$.

Il en résulte que

$$\text{pour tout } t \geq 0 \quad x(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

(b) On a $x(2) = \frac{1}{2}g \times 2^2 = 2 \times 9,81 = 19,62 \text{ m}$. Or la tour mesure 50 m. Ainsi

après 2 secondes de chute, le corps se trouve à $50 - 19,62 = 30,38 \text{ m}$ du sol.

(c) Déterminer le moment de l'impact revient à résoudre l'équation $x(t) = 50$.

Ce qui donne $\frac{1}{2}gt^2 = 50$ ou encore $t = \sqrt{\frac{100}{g}}$ car t est positif.

On a donc

$$t \approx 3,19 \text{ s}$$

4. On a vu d'après les questions précédentes qu'en absence de forces de frottement, la vitesse de chute d'un objet est **indépendante de sa masse**.

Ainsi le marteau et la plume chutent à la même vitesse.

Par conséquent

ils touchent le sol de la lune en même temps.

Remarques :

- Galilée a prouvé expérimentalement que la chute des corps dans le vide est **un mouvement rectiligne uniformément accéléré** sous l'effet de la force de pesanteur.
- Les astronautes de la mission Apollo 15 ont rendu hommage à Galilée en réalisant une expérience filmée de chute de deux objets de masses différentes sur le sol de la Lune.

Exercice 12

Chute d'un corps avec résistance de l'air

1. D'après le principe fondamental de la dynamique, on a pour tout $t \geq 0$

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= m\vec{g} - k\vec{v} \\ ma(t) &= -kv + mg \quad \text{en projetant sur l'axe (Ox)} \\ a(t) &= -\frac{k}{m}v(t) + g \quad \text{en divisant par } m \neq 0 \end{aligned}$$

Or $a(t) = v'(t)$ donc

$$\text{pour tout } t \geq 0 \quad v'(t) = -\frac{k}{m}v(t) + g$$

2. $v'(t) = -\frac{k}{m}v(t) + g$ est une équation différentielle du premier ordre dont les solutions sont données par

$$v(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t} - \frac{g}{\frac{-k}{m}} = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{gm}{k}$$

où C est une constante réelle à déterminer.

Or la chute est sans vitesse initiale, c'est-à-dire $v(0) = 0$.

Autrement dit $Ce^0 + \frac{gm}{k} = 0$ ou encore $C = -\frac{gm}{k}$.

Il en résulte que, pour tout $t \geq 0$, on a

$$v(t) = -\frac{gm}{k}e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{gm}{k}$$

Ainsi

$$\text{pour tout } t \geq 0 \quad v(t) = \frac{gm}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

3. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{-k}{m}t\right) = 0$ car $\frac{-k}{m} < 0$.

Par opérations sur les limites, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) = 1$.

Par conséquent

$$v_{\infty} = \frac{gm}{k}$$

Exercice 13

Loi de refroidissement de Newton

1. ➤ La fonction θ est dérivable sur $[0 ; +\infty[$,

➤ la fonction qui à t associe $e^{-0,2t}$ est dérivable et ne s'annule pas sur $[0 ; +\infty[$.

Alors, par quotient, la fonction f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$. De plus, pour tout t dans $[0 ; +\infty[$, on a

$$f'(t) = \frac{\theta'(t)e^{-0,2t} - \theta(t) \times (-0,2)e^{-0,2t}}{(e^{-0,2t})^2} = \frac{[\theta'(t) + 0,2\theta(t)]e^{-0,2t}}{e^{-0,4t}}$$

Or,

$$\theta'(t) = -0,2t\theta(t) \quad \text{donc} \quad \theta'(t) + 0,2\theta(t) = 0.$$

Ainsi, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, $f'(t) = 0$.

2. D'après la question précédente, la fonction dérivée f' est nulle sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, donc la fonction f est constante sur $[0 ; +\infty[$. Or, $f(0) = \frac{\theta(0)}{e^0} = 80$.
Il s'ensuit que $f(t) = f(0) = 80$.
Par ailleurs, pour tout $t \in [0 ; +\infty[$,

$$f(t) = \frac{\theta(t)}{e^{-0,2t}} \quad \text{donc} \quad \theta(t) = f(t)e^{-0,2t}.$$

Il en résulte que $\theta(t) = 80e^{-0,2t}$.

En résumé, on a pour tout $t \in [0 ; +\infty[$

$$f(t) = f(0) = 80 \quad \text{et} \quad \theta(t) = 80e^{-0,2t}$$

3. Pour tout $t \in [0 ; +\infty[$, $\theta(t) = 80e^{-0,2t}$. Donc $\theta(0) = 80$. Aussi

$$\theta'(t) = 80 \times (-0,2)e^{-0,2t} = -0,2 \times \underbrace{80e^{-0,2t}}_{=\theta(t)}$$

Donc $\theta'(t) = -0,2\theta(t)$.

La fonction θ est donc bien solution du problème.

Quelques remarques :

- Grâce à la fonction exponentielle, on peut connaître la température du café à n'importe quel instant. Ainsi $\theta(4) = 80 \times e^{-0,2 \times 4} \approx 35,95$ °C.
Au bout de 10 minutes, la température du café est d'environ 10,83 °C, valeur proche de la température de la pièce!
- On trouve une expression de la fonction θ en résolvant l'équation différentielle

$$\theta'(t) = -0,2\theta(t), \quad t \in [0 ; +\infty[\quad (9.1)$$

Exercice 14 Dynamique des populations

Partie A : le modèle de Malthus

1. L'équation différentielle $n'(t) = rn(t)$ a pour solutions sur $\mathbb{R}_+$ les fonctions $n(t) = Ce^{rt}$ où C est une constante réelle à déterminer.
Or, $n(0) = 500 = C$, ce qui permet d'écrire

$$\text{pour tout } t \geq 0 \quad n(t) = 500e^{0,15t}$$

2. On obtient le tableau suivant

t en années	0	1	2	3	4	5	99
$n(t)$	500	581	675	784	911	1 059	1 406 834 664

3. On trouve $n(99) \approx 1\,406\,834\,664$, ce qui est clairement très loin de la réalité.
Le modèle exponentiel de Malthus perd vite son intérêt de par la croissance exponentielle qui ferait tendre la population rapidement vers l'infini sans tenir compte des ressources nécessaires de l'écosystème qui l'entoure.

Partie B : le modèle de Verhulst

1. On a $n(0) = 500 > 0$, donc pour tout $t \geq 0$, $n(t) > 0$.

En divisant l'équation (E_1) par $n^2(t) \neq 0$, on obtient que

$$(E_1) \text{ est équivalente à } (E_2) : \frac{n'(t)}{n^2(t)} = r \left(\frac{1}{n(t)} - \frac{1}{K} \right)$$

2. Pour tout $t \geq 0$, on pose $y(t) = \frac{1}{n(t)} - \frac{1}{K}$. On a donc $y'(t) = \frac{-n'(t)}{n^2(t)}$.

Il en résulte que : n est solution sur $\mathbb{R}_+$ de (E_2) si, et seulement si, y est solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation différentielle $-y'(t) = ry(t)$.

Par conséquent

$$\text{résoudre } (E_2) \text{ revient à résoudre } (F) : y'(t) = -ry(t).$$

3. Les solutions de l'équation (F) sont données par $y(t) = Ce^{-rt}$ où C est une constante réelle à déterminer.

Or $y(0) = C = \frac{1}{n(0)} - \frac{1}{K} = \frac{1}{500} - \frac{1}{K} = \frac{K-500}{500K}$, donc

$$\text{pour tout } t \geq 0 \quad y(t) = \frac{K-500}{500K} e^{-rt}$$

4. D'après ce qui précède, pour tout $t \geq 0$,

$$y(t) = \frac{1}{n(t)} - \frac{1}{K} = \frac{K-500}{500K} e^{-rt}$$

Donc, pour tout $t \geq 0$

$$\frac{1}{n(t)} = \frac{K-500}{500K} e^{-rt} + \frac{1}{K} = \frac{1}{K} \left[1 + \left(\frac{K}{500} - 1 \right) e^{-rt} \right]$$

On conclut que

$$\text{pour tout } t \geq 0 \quad n(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{500} - 1 \right) e^{-rt}}$$

5. On obtient le tableau suivant

t en années	0	1	2	3	4	5	99
$n(t)$	500	575	660	756	864	985	7 500

6. $r = 0,15 > 0$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-rt} = 0$ et par opérations sur les limites

$$n_{\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} n(t) = 7\,500$$

Remarque :

Le modèle de Verhulst modélise bien la réalité tant que le nombre d'années t reste petit.

Il perd tout intérêt dès que t est assez grand. On voit bien que $n(99) \approx n_{\infty}$.

Exercice 15
Modélisation
1. Obtention de l'équivalence :

$$\begin{aligned}
 x \text{ est solution de (E)} &\Leftrightarrow 25x' + 200x'' = 50 &\Leftrightarrow 25v + 200v' = 50 \\
 &\Leftrightarrow 200v' = -25v + 50 &\Leftrightarrow v' = \frac{-25}{200}v + \frac{50}{200} \\
 &\Leftrightarrow v' = -\frac{1}{8}v + \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$x \text{ est solution de (E) si, et seulement si, } x' \text{ est solution de (F) : } v' = -\frac{1}{8}v + \frac{1}{4} \text{ où } x' = v.$$

Résolution de (F) :

(F) est une équation différentielle linéaire du premier ordre dont les solutions sont de la forme

$$v = Ce^{-\frac{1}{8}t} - \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{8}} \text{ avec } C \text{ une constante réelle. Ainsi}$$

$$\text{les solutions de (F) sont données par } Ce^{-\frac{1}{8}t} + 2 \text{ où } C \text{ est une constante réelle.}$$

2. (a) Pour tout nombre réel t , $x'(t) = v(t) = Ce^{-\frac{1}{8}t} + 2$ où C est une constante réelle à déterminer.

$$\text{Or, } x'(0) = 0 = C + 2, \text{ donc } C = -2. \text{ Il en résulte que } x'(t) = -2e^{-\frac{1}{8}t} + 2.$$

Par conséquent

$$\text{pour tout nombre réel } x \quad x'(t) = 2\left(1 - e^{-\frac{1}{8}t}\right).$$

(b) Les primitives sur $[0 ; +\infty[$ de la fonction $t \mapsto 2\left(1 - e^{-\frac{1}{8}t}\right)$ sont de la forme $t \mapsto 2\left(t + 8e^{-\frac{1}{8}t}\right) + C$ où C est constante réelle.

$$\text{Ainsi } x(t) = 2\left(t + 8e^{-\frac{1}{8}t}\right) + C. \text{ Or d'après l'énoncé } x(0) = 0, \text{ ce qui donne } 0 = 16 + C \text{ ou encore } C = -16.$$

$$\text{On a donc pour tout } t \in [0 ; +\infty[, \quad x(t) = 2\left(t + 8e^{-\frac{1}{8}t}\right) - 16.$$

On conclut que

$$\text{pour tout nombre réel } t \text{ positif} \quad x(t) = 2t - 16 + 16e^{-\frac{1}{8}t}.$$

3. On a $v(t) = 2\left(1 - e^{-\frac{1}{8}t}\right)$.

$$\text{Or, } \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{8}t} = 0, \text{ donc}$$

$$V = \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 2$$

On a, grâce à la croissance de la fonction $\ln$ sur $]0 ; +\infty[$,

$$\begin{aligned}
 v(t) \leq \frac{9}{10}V &\Leftrightarrow 2\left(1 - e^{-\frac{1}{8}t}\right) \leq \frac{9}{10} \times 2 &\Leftrightarrow 1 - e^{-\frac{1}{8}t} \leq \frac{9}{10} \\
 &\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{8}t} \geq 1 - \frac{9}{10} &\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{8}t} \geq \frac{1}{10} \\
 &\Leftrightarrow \ln\left(\underbrace{e^{-\frac{1}{8}t}}_{>0}\right) \geq \ln\left(\frac{1}{10}\right) &\Leftrightarrow -\frac{1}{8}t \geq -\ln(10) \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{8}t \leq \ln 10 &\Leftrightarrow t \leq 8\ln(10)
 \end{aligned}$$

Or, $8 \times \ln(10) \approx 18,42068$. Donc

$$v(t) \leq \frac{9}{10}V \text{ si, et seulement si, } t \text{ est inférieur à environ } 18,42 \text{ secondes.}$$

4. Il s'agit de calculer $x(30)$. On a

$$x(30) = 2 \times 30 - 16 + 16e^{-\frac{1}{8} \times 30} = 44 + 16e^{-\frac{15}{4}} \approx 44,37628$$

On conclut que

en 30 secondes, le chariot a parcouru environ 44,4 m au décimètre près.

Exercice 16 Dynamique des populations 2

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{N(t)}$ est dérivable sur $[0 ; +\infty[$, car inverse d'une fonction dérivable et à valeurs non nulles sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Ainsi,

$$\text{pour tout } t \geq 0, \quad g'(t) = \frac{-N'(t)}{N^2(t)}.$$

2.

$$\begin{aligned} N \text{ est solution de (E)} & \quad \text{si, et seulement si,} & N'(t) &= 3N(t) - 0,005N^2(t) \\ & \quad \text{si, et seulement si,} & \frac{-N'(t)}{N^2(t)} &= \frac{-3N(t)}{N^2(t)} - 0,005 \times \frac{-N^2(t)}{N^2(t)} \quad (N^2(t) \neq 0) \\ & \quad \text{si, et seulement si,} & \frac{-N'(t)}{N^2(t)} &= -3 \times \frac{1}{N(t)} + 0,005 \\ & \quad \text{si, et seulement si,} & g'(t) &= -3g(t) + 0,005 \\ & \quad \text{si, et seulement si} & g &\text{ est solution de (E') : } y' = -3y + 0,005. \end{aligned}$$

3. D'après le cours, les solutions sur $[0 ; +\infty[$ de l'équation (E') sont données par

$$g(t) = Ce^{-3t} + \frac{0,005}{3} \quad \text{où } C \in \mathbb{R}.$$

Or, pour tout $t \geq 0$, $N(t) = \frac{1}{g(t)}$, donc les solutions sur $[0 ; +\infty[$ de l'équation (E) sont données par

$$N(t) = \frac{3}{3Ce^{-3t} + 0,005} \quad \text{où } C \in \mathbb{R}.$$

4. (a) Par hypothèse, $N(0) = \frac{3}{3C + 0,005} = 2000$, donc $C = \frac{-7}{6000}$, ce qui donne

$$N(t) = \frac{6000}{10 - 7e^{-3t}}.$$

(b) D'après ce qui précède,

$$N(2) = \frac{6000}{10 - 7e^{-6}} \approx 601.$$