Chapitre 5

Continuité des fonctions d'une variable réelle

Les objectifs du chapitre

La justification de la continuité ou de la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle n'est pas un objectif du programme. Hormis pour la fonction exponentielle, l'étude de la réciproque d'une fonction continue n'est pas au programme.

Contenu

- Fonction continue en un point (définition par les limites), sur un intervalle. Toute fonction dérivable est continue
- Image d'une suite convergente par une fonction continue
- Théorème des valeurs intermédiaires. Cas des fonctions continues strictement monotones.

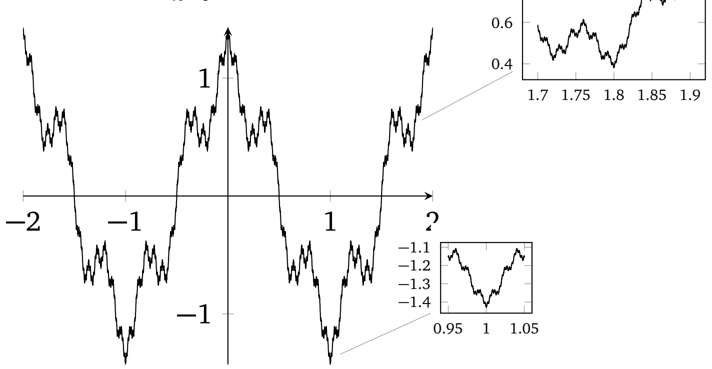
Capacités attendues

- Étudier les solutions d'une équation du type $f(x) = k$: existence, unicité, encadrement
- Pour une fonction continue f d'un intervalle dans lui-même, étudier une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Approfondissements possibles

- Démonstration par dichotomie du théorème des valeurs intermédiaires
- Fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous réels x, y
- Prolongement par continuité

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$



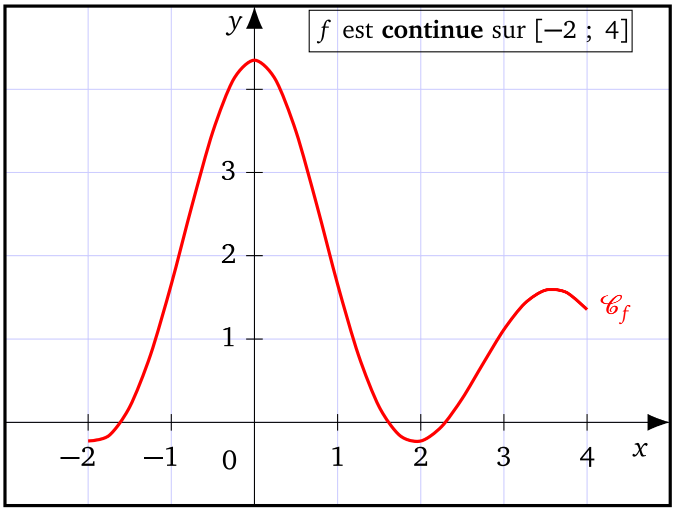
I Le cours

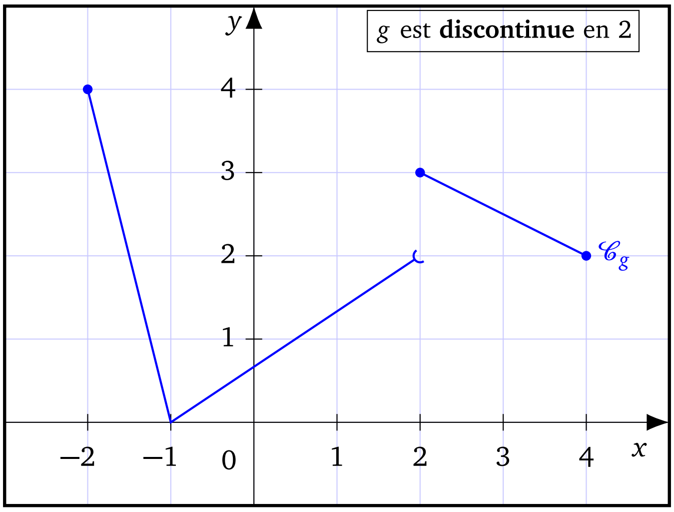
1. Notion de continuité

Définition 1 : continuité d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit $a \in \mathrm{I}$.

- Dire que f est **continue en** a signifie que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- Dire que f est continue sur l'intervalle I signifie que f est continue en tout point a de I.





Exemples

- Les fonctions polynômes et la fonction exponentielle sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carrée est continue sur $[0 ; +\infty[$.
- Les sommes, produits, quotients et composées de fonctions continues sont des fonctions continues sur tout intervalle inclus dans leur domaine de définition.

Méthode 1 : étude de la continuité d'une fonction

Étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 3 & \text{si } x \geq 0 \\ 4x^3 + 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Corrigé

f est la somme de deux fonctions continues sur $[0 ; +\infty[$ et f est une fonction polynôme sur $]-\infty ; 0[$.
Elle est donc continue sur ces deux intervalles.
Par ailleurs

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 2 \neq -2 = \lim_{x \to 0^+} f(x).$$

Il en résulte que f n'est pas continue en 0.
En conclusion, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Propriété 1 : continuité des fonctions dérivables

Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point de $\mathbb{R}$.
Toute fonction dérivable sur I est continue sur I. La réciproque est fausse !

Démonstration

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. O Soient x et a deux éléments de I. Pour tout $x \neq a$,

$$f(x)-f(a)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times(x-a).$$

Or, f est dérivable en a, donc $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$.
Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to a}(x-a)=0$. Donc par produit des limites

$$\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\lim_{x\to a}(x-a)=0.$$

Il s'ensuit que $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$ et la fonction f est continue en a.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3+5x^2-7$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Le théorème des valeurs intermédiaires

Karl Weierstrass

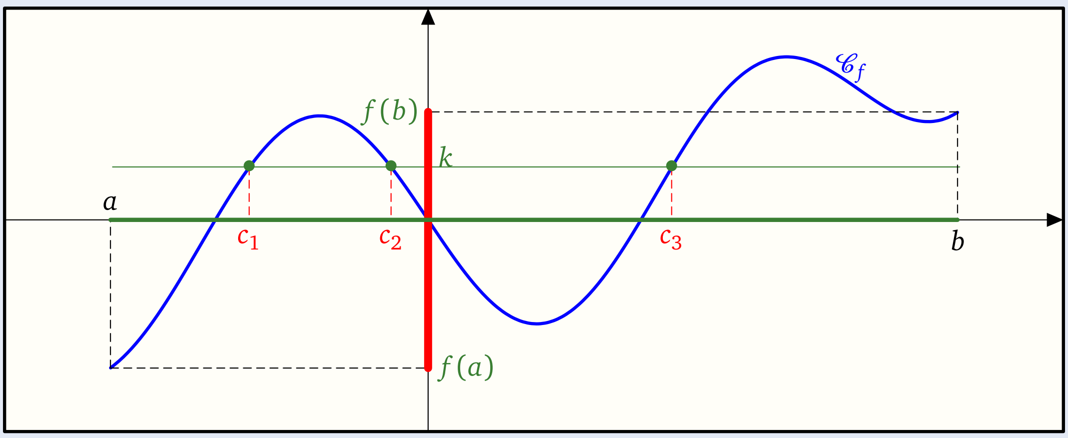
Karl Weierstrass (1815-1897) est un des plus grands mathématiciens du 19e siècle. Il est souvent cité comme le père de l'analyse moderne. Il consolide des travaux de Cauchy sur les nombres irrationnels et leur donne une nouvelle compréhension. Il est le premier à établir une définition précise de la continuité d'une fonction en un point ce qui lui permit de donner des démonstrations rigoureuses de plusieurs théorèmes qui reposent sur des propriétés des nombres réels jusqu'alors tenues pour intuitives, tels le théorème des valeurs intermédiaires. On lui doit également le symbole de la valeur absolue d'un réel.

Weierstrass expliquant à Cauchy la notion de convergence uniforme[a]

[a]. Illustration tirée du passionnant livre **Analysis by its history** de E. Hairer et G. Wanner, Springer, 2008.

Propriété 2 : théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Soit f une fonction **continue** sur un un intervalle $[a\ ;\ b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, **il existe au moins** un réel c dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$ tel que $f(c)=k$.



Méthode 2 : application du théorème des valeurs intermédiaires

Montrer que l'équation $x\sqrt{x+1}=5$ admet au moins une solution dans $[0\,;3]$.

Corrigé

Soit f la fonction définie sur $[0\;;\;3]$ par $f(x)=x\sqrt{x+1}$.

- f est continue sur $[0\;;\;3]$ comme produit de fonctions continues sur $[0\;;\;3]$;
- 5 est compris entre $f(0)=0$ et $f(3)=6$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation proposée admet au moins une solution dans $[0\;;\;3]$.

Remarques importantes

- Le TVI est un **théorème d'existence** qui permet de prouver que si une fonction f est continue sur un intervalle $[a\;;\;b]$, alors elle prend au moins une fois toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.
- On peut aussi utiliser des limites si f n'est pas définie en a ou en b, ou bien encore des limites en $-\infty$ ou en $+\infty$.
- Le théorème des valeurs intermédiaires indique s'il existe une solution mais il ne permet pas un calcul effectif de celle-ci.

Propriété 3 : un cas particulier du TVI (le théorème de Bolzano)

Si f est continue sur $[a\;;\;b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires (ce qui équivaut à $f(a)f(b)<0$), alors il existe au moins un réel c dans $]a\;;\;b[$ tel que $f(c)=0$.

Bernard Bolzano

Bernard Bolzano est un mathématicien, logicien et philosophe né et mort à Prague. Il est l'un des premiers à tenter de donner des fondements logiques à toute science, aux mathématiques en particulier, fondements qui soient débarrassés des "évidences" que nous donne notre perception du monde. Ainsi, il est le premier à donner une preuve purement analytique du théorème des valeurs intermédiaires en 1834, il est aussi le premier à construire une fonction continue nulle part dérivable. Il démontre par ailleurs que les intervalles $[0\;;\;1]$ et $[0\;;\;2]$ ont le même cardinal, c'est-à-dire le même nombre d'éléments !

Bernard Bolzano $1781-1848$

Méthode 3 : existence d'une solution d'une équation donnée

Montrer que l'équation $3\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}=x$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

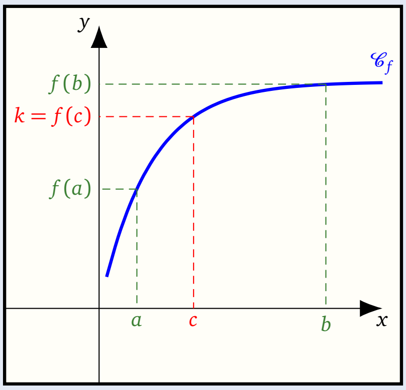
Corrigé

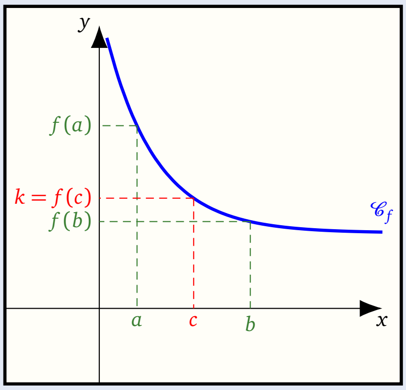
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}-x$.
Résoudre l'équation $3\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}=x$ revient à résoudre l'équation $f(x)=0$.
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car dérivable sur cet intervalle.
De plus, $f(0)=3>0$ et $f(2)=3\mathrm{e}^{-2}-2=\dfrac{3-2\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2}<0$.
Ainsi, $f(0)\times f(2)<0$.
Par le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans $]0\;;\;2[$.
Par conséquent,

$$\boxed{\text{l'équation } 3\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}=x \text{ admet au moins une solution dans } \mathbb{R}.}$$

Propriété 4 : corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Si f est **continue et strictement monotone** sur $[a\ ;\ b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique solution** dans $[a\ ;\ b]$.





Méthode 4 : nombre de solutions d'une équation donnée

Déterminer le nombre de solutions de l'équation $\mathrm{e}^{1-x^2} = 2$.

Corrigé

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par $f(x) = \mathrm{e}^{1-x^2} - 2$. Ainsi $\mathrm{e}^{1-x^2} = 2$ est équivalent à $f(x) = 0$.

❶ Sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0[$:

- f est continue sur $]-\infty\ ;\ 0[$ car dérivable sur cet intervalle ;
- pour tout $x < 0$, $f'(x) = -2x\mathrm{e}^{1-x^2}$.
  Le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty\ ;\ 0[$ est donc celui de $-x$.
  Ainsi f est strictement croissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$;
- 0 est compris entre $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2 < 0$ et $f(0) = \mathrm{e} - 2 > 0$.

Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence d'une unique solution de $f(x) = 0$ dans l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0[$. On la note x_1

❷ Sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$:
De la même manière, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'une unique solution sur $]0\ ;\ +\infty[$ de l'équation $f(x) = 0$. On la note x_2.

Par ailleurs $f(0) \neq 0$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.

3. Application aux suites

Propriété 5 : interversion $\lim / f$

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit (u_n) une suite d'éléments de I qui converge vers $a \in$ I. Alors

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \to +\infty} u_n\right) = f(a)$$

Exemple

Soit f la fonction carré et soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$.
On a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(2) = 4$.

Propriété 6 : suite définie par récurrence et point fixe

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{I}$ une fonction et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 \in \mathrm{I}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
On suppose que :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite notée ℓ ;
- $\ell \in \mathrm{I}$;
- f est continue en ℓ.

Alors ℓ est un point fixe de f, c'est-à-dire que ℓ est solution dans I de l'équation $f(\ell) = \ell$.

Remarques importantes

Ce théorème s'applique de la manière suivante.

- On exprime u_{n+1} sous la forme de $f(u_n)$;
- on vérifie que f est continue sur I ;
- on vérifie que la fonction f est à valeurs dans I ;
- on résout sur I l'équation $f(x) = x$.

Attention, ℓ n'est pas forcément la seule solution de l'équation $f(x) = x$.

Méthode 5 : déterminer la limite d'une suite définie par récurrence

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3}{u_n + 1}$.
On admet que

- (u_n) est convergente ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0 ; 3]$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Corrigé

Soit f la fonction définie sur $\mathrm{I} = [0 ; 3]$ par $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$.

- f est continue sur I comme inverse d'une fonction continue ne s'annulant par sur I.
- Pour tout $x \in [0 ; 3]$, on a $1 \leq x+1 \leq 4$ et donc par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0 ; +\infty[$, $\dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{x+1} \leq 1$. Ainsi $\dfrac{3}{4} \leq \dfrac{3}{x+1} \leq 3$.
  Or, $\left[\dfrac{3}{4} ; 3\right] \subset \mathrm{I}$, donc pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) \in \mathrm{I}$.
- On a
  $$f(\ell) = \ell \iff \ell = \frac{3}{\ell+1} \iff \ell^2 + \ell - 3 = 0.$$
  Le discriminant de cette équation du second degré est égale à 13, donc l'équation admet deux solutions réelles données par
  $$\ell_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \notin \mathrm{I} \qquad \text{et} \qquad \ell_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \in \mathrm{I}.$$
  Par théorème, on conclut que
  $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}.}$$

II Les exercices

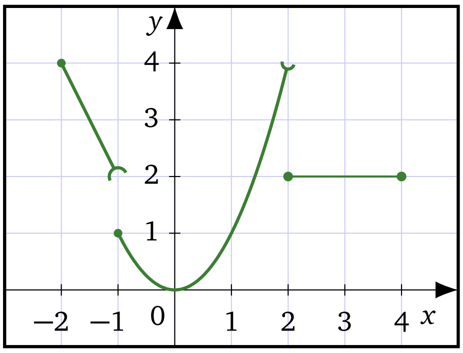
Exercice 1 Étude de la continuité d'une fonction

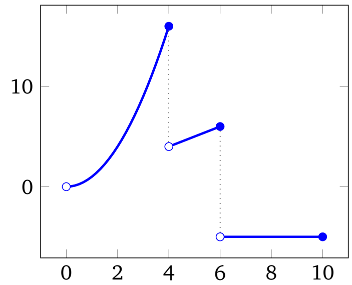
Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 4x - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ **2.** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ **3.** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x^2}}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Exercice 2 Lecture graphique

f et g sont deux fonctions définies respectivement sur $[-2 \,;\, 4]$ et $[0 \,;\, 10]$.
Dire sur quels intervalles ces fonctions sont continues.





Exercice 3 D'après le livre scolaire

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x \leq 2, \\ 7 & \text{si } x > 2. \end{cases}$
La fonction f est-elle continue en 2 ? Justifier.

Exercice 4 D'après le livre scolaire

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} e^{3x} + 1 & \text{si } x \leq 0, \\ \sqrt{2 + x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$

1. f est-elle continue en 0 ? Justifier. **2.** f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Justifier.

Exercice 5 Continuité en un point

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \begin{cases} (kx - 1)^2 & \text{si } x < 1, \\ x^2 + x\sqrt{x} + 2 & \text{si } x > 1, \\ 4 & \text{si } x = 1. \end{cases}$
Déterminer les éventuelles valeurs du réel k pour lesquelles la fonction f est continue en 1.

Exercice 6 Prolongement par continuité

Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit f la fonction définie sur $[2 \,;\, +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} & \text{si } x > 2, \\ a & \text{si } x = 2. \end{cases}$

1. Montrer que pour tout $x > 2$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2} + 2}$.

2. En déduire la valeur du réel a pour que la fonction f soit continue sur $[2 \,;\, +\infty[$

Exercice 7 Nombre de solutions d'une équation

On considère une fonction f continue sur $\mathbb{R}$. f est strictement monotone sur les intervalles $]-\infty\,;\,-1[$, $]-1\,;\,1[$ et $]1\,;\,+\infty[$. Le tableau de variations de f est le suivant

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$.

Exercice 8 Se ramener à une équation du type $f(x) = 0$

Démontrer que l'équation $\mathrm{e}^{-x^2} = x^2$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 9 Étude d'une suite

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{5}$.

1. Déterminer la fonction f telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. Étudier les variations de la fonction f,

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.

4. Montrer par récurrence que (u_n) est décroissante.

5. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 10 Suite récurrente et continuité

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 &= -1 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} &= f(u_n) = 2\sqrt{u_n + 3} \end{cases} \qquad \text{où } f \text{ est définie sur } \mathrm{I} = [-2\,;\,+\infty[.$$

1. Montrer que f est croissante sur I.

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad -1 \leq u_n \leq 6$.

3. Justifier que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ que l'on déterminera.

Exercice 11 D'après un sujet de Bac 1

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à $\mathscr{C}_f$.

3. On note f' la fonction dérivée de f.

Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$.

4. Étudier les variations de la fonction f sur son domaine de définition.
On établira un tableau de variations de la fonction f dans lequel apparaitront les limites.

5. Soit m un nombre réel. Préciser, en fonction du réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

6. On note Δ la droite d'équation $y = -x$.
On note A un éventuel point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a en lequel la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ est parallèle à Δ.

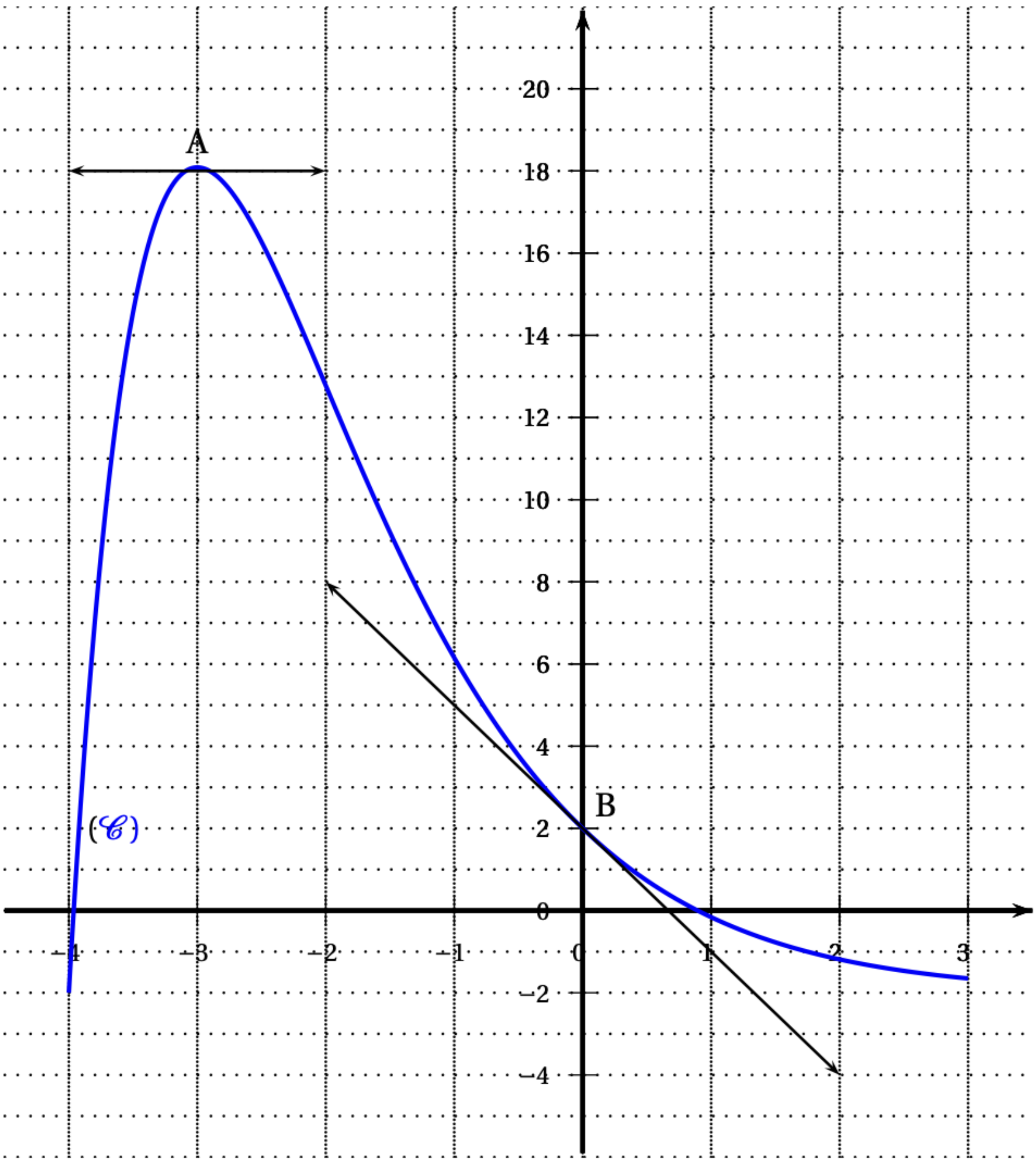
(a) Montrer que a est solution de l'équation $\mathrm{e}^x (x-1) + x^2 = 0$.
Indication : le coefficient directeur de la droite Δ est égal à -1.

(b) On note g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x (x-1) + x^2$.
On admet que la fonction g est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.
Donner une expression de $g'(x)$ pour tout nombre réel x de $[0\,;\,+\infty[$.

(c) Montrer qu'il existe un unique point A en lequel la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.

Exercice 12 D'après un sujet de Bac 2

La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous représente dans un repère orthogonal une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\,;\,3]$. Les points A d'abscisse -3 et B$(0\,;\,2)$ sont sur la courbe $\mathscr{C}_f$.
Sont aussi représentées sur ce graphique les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ respectivement aux points A et B, la tangente au point A étant horizontale. On note f' la fonction dérivée de f.



Les parties A et B sont indépendantes

PARTIE A

1. Par lecture graphique, déterminer :
   (a) $f'(-3)$;
   (b) $f(0)$ et $f'(0)$.

2. La fonction f est définie sur $[-4\ ;\ 3]$ par

$$f(x) = a + (x+b)\mathrm{e}^{-x}$$

où a et b sont deux réels que l'on va déterminer dans cette partie.
   (a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $[-4\ ;\ 3]$.
   (b) À l'aide des questions précédentes, montrer que les nombres a et b vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} a+b & = & 2 \\ 1-b & = & -3 \end{cases}$$

   (c) Déterminer alors les valeurs des nombres a et b.

PARTIE B

On admet que la fonction f est définie sur $[-4\ ;\ 3]$ par

$$f(x) = -2 + (x+4)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Justifier que, pour tout réel x de $[-4\ ;\ 3]$, $f'(x) = (-x-3)\mathrm{e}^{-x}$ et en déduire le tableau de variation de f sur $[-4\ ;\ 3]$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-3\ ;\ 3]$, puis donner une valeur approchée de α à 0,01 près par défaut.

Exercice 13 — Convergence d'une suite définie par récurrence

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{10}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n+3}{u_n+4}$.

1. Étudier les variations de la fonction $f\,;x \mapsto \dfrac{2x+3}{x+4}$ sur $\mathrm{I} =]-4\ ;\ +\infty[$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0\ ;\ 1]$.

3. Étudier les variations de la suite (u_n).

4. En déduire que la suite suite (u_n) est convergente. Que vaut $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$?

Exercice 14 — Existence et unicité d'une solution de $f(x) = 0$

1. Montrer que l'équation $x^3 - 9x^2 + 24x - 12 = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

Exercice 15 — Application du corollaire du TVI

Montrer que l'équation $2(x-1)\mathrm{e}^{x-1} = x^2$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in]1,7\ ;\ 1,8[$.

Exercice 16 D'après un sujet de Bac 3

Partie 1

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (1-x)\mathrm{e}^{x} - 1.$$

On note g' la fonction dérivée de g.

1. (a) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

(b) Montrer que pour tout nombre réel x, on a $g'(x) = -x\mathrm{e}^{x}$.

(c) Dresser le tableau de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. On vérifiera que $g(0) = 0$.

2. En déduire que, pour tout réel x, $g(x) \leq 0$.

Partie 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (2-x)\mathrm{e}^{x} - x.$$

$\mathscr{C}_f$ désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

1. (a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

(b) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

2. (a) Montrer que pour tout nombre réel x, on a $f'(x) = g(x)$.

(b) Interpréter géométriquement le résultat $f'(0) = 0$.

(c) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $\dfrac{3}{2} < \alpha < 2$.

On admet que $\mathrm{e}^{\frac{3}{2}} > 3$.

4. On considère la droite d d'équation $y = -x$.

(a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) + x = 0$, puis en déduire que $\mathscr{C}_f$ et d sont sécantes en $\mathrm{A}(2\,;\,-2)$.

(b) Étudier le signe sur $\mathbb{R}$ de l'expression $f(x) + x$.

(c) En déduire que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de d sur $]-\infty\,;\,2[$ et en dessous de d sur $]2\,;\,+\infty[$.

5. Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion de coordonnées $(0\,;\,2)$.

Exercice 17 D'après un sujet de Bac 4

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM)

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x^2 - 2x - 1\right)\mathrm{e}^{x}.$$

A. La fonction dérivée de f est la fonction définie par $f'(x) = (2x-2)\mathrm{e}^{x}$

B. La fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,2]$

C. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{5+\mathrm{e}^{x}}$.

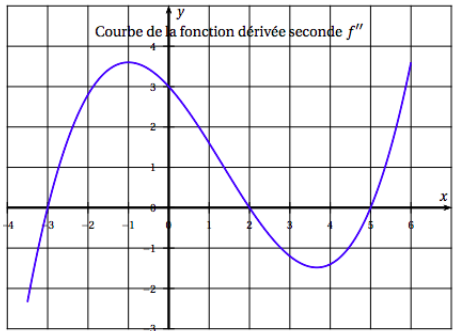
Sa courbe représentative dans un repère admet :

A. une seule asymptote horizontale

B. une asymptote horizontale et une asymptote verticale

C. deux asymptotes horizontales

3. On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_{f''}$ représentant la fonction dérivée seconde f'' d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-3,5\ ;\ 6]$.



A. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-3\ ;\ 3]$

B. La courbe de la fonction f admet trois points d'inflexion

C. La fonction dérivée f' de f est décroissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 17n + 20$.

A. La suite (u_n) est minorée

B. La suite (u_n) est décroissante

C. L'un des termes de la suite (u_n) est égal à 2 021

5. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 0,75u_n + 5$.

On considère la fonction " seuil " suivante écrite en Python :

```
def seuil () :
    u=2
    n=0
    while u < 45 :
        u=0.75*u+5
        n=n+1
    return n
```

Cette fonction renvoie :

A. la plus petite valeur de n telle que $u_n \geq 45$

B. la plus petite valeur de n telle que $u_n < 45$

C. la plus grande valeur de n telle que $u_n \geq 45$

Exercice 18 D'après un sujet de Bac 5

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \mathrm{e}^{-2x}.$$

On appelle Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

4. Déduire des questions précédentes le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie II

Dans le repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$, on appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

La courbe $\mathscr{C}$ et la courbe Γ (qui représente la fonction f de la Partie I) sont tracées sur le **graphique donné en annexe qui est à compléter et à rendre avec la copie.**

Le but de cette partie est de déterminer le point de la courbe $\mathscr{C}$ le plus proche de l'origine O du repère et d'étudier la tangente à $\mathscr{C}$ en ce point.

1. Pour tout nombre réel t, on note M le point de coordonnées $\left(t\ ;\ \mathrm{e}^{-t}\right)$ de la courbe $\mathscr{C}$.
On considère la fonction h qui, au nombre réel t, associe la distance OM.
On a donc : $h(t) = \mathrm{O}M$, c'est-à-dire :

$$h(t) = \sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}$$

(a) Montrer que, pour tout nombre réel t,

$$h'(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}}.$$

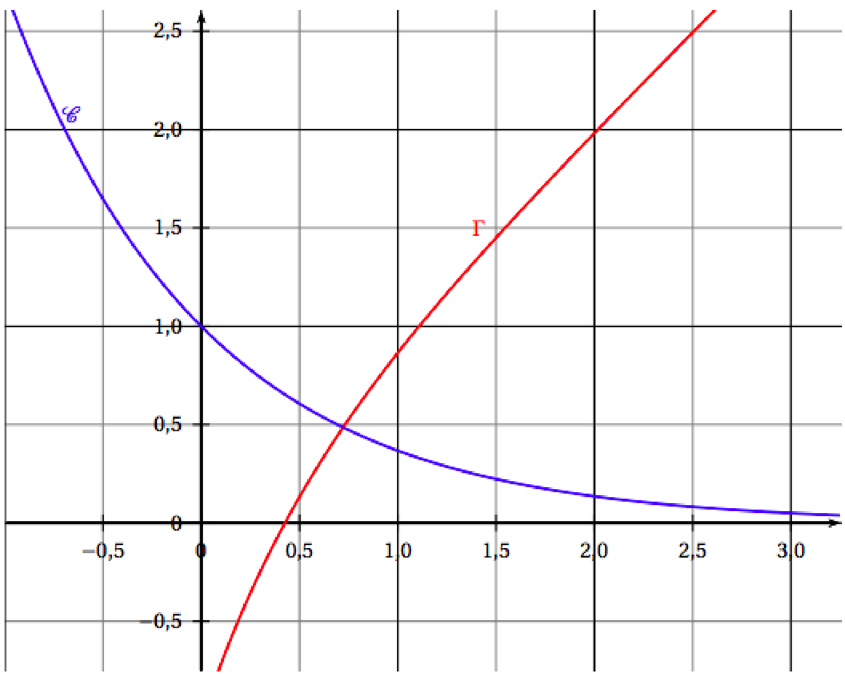
où f désigne la fonction étudiée dans la **Partie I**.

(b) Démontrer que le point A de coordonnées $\left(\alpha\ ;\ \mathrm{e}^{-\alpha}\right)$ est le point de la courbe $\mathscr{C}$ pour lequel la longueur OM est minimale.
Placer ce point sur le **graphique donné en annexe, à rendre avec la copie**.

2. On appelle T la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}$.

(a) Exprimer en fonction de α le coefficient directeur de la tangente T.
On rappelle que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal à $\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{\alpha}$.
On rappelle également le résultat suivant qui pourra être utilisé sans démonstration :
Dans un repère orthonormé du plan, deux droites D et D′ de coefficients directeurs respectifs m et m′ sont perpendiculaires si, et seulement si le produit mm′ est égal à -1.

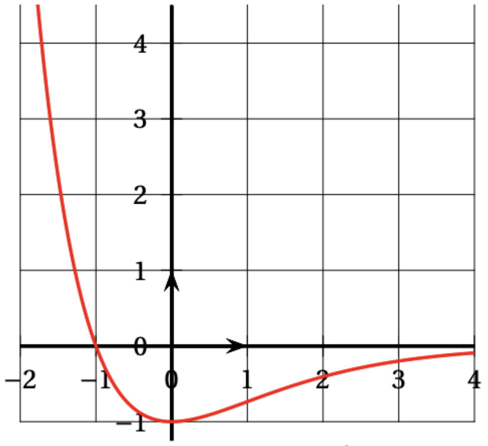
(b) Démontrer que la droite (OA) et la tangente T sont perpendiculaires.
Tracer ces droites sur le graphique ci-dessous.



Exercice 19 D'après un sujet de Bac 6

Partie 1

On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la fonction dérivée f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.



Courbe représentant la **dérivée** f' de la fonction f.

À l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant les réponses :

1. Le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. La convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie 2

On admet que la fonction f mentionnée dans la Partie 1 est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' et f'' les fonctions dérivées première et seconde de f respectivement.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x,

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x} + 2\mathrm{e}^{-x}.$$

En déduire la limite de f en $+\infty$.
Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote que l'on précisera.
On admet que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2. (a) Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

(b) Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f et dresser son tableau de variations.

(c) Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-2\ ;\ -1]$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.

3. Déterminer, pour tout nombre réel x, l'expression de $f''(x)$ et étudier la convexité de la fonction f.
Que représente pour la courbe $\mathscr{C}_f$ son point A d'abscisse 0 ?