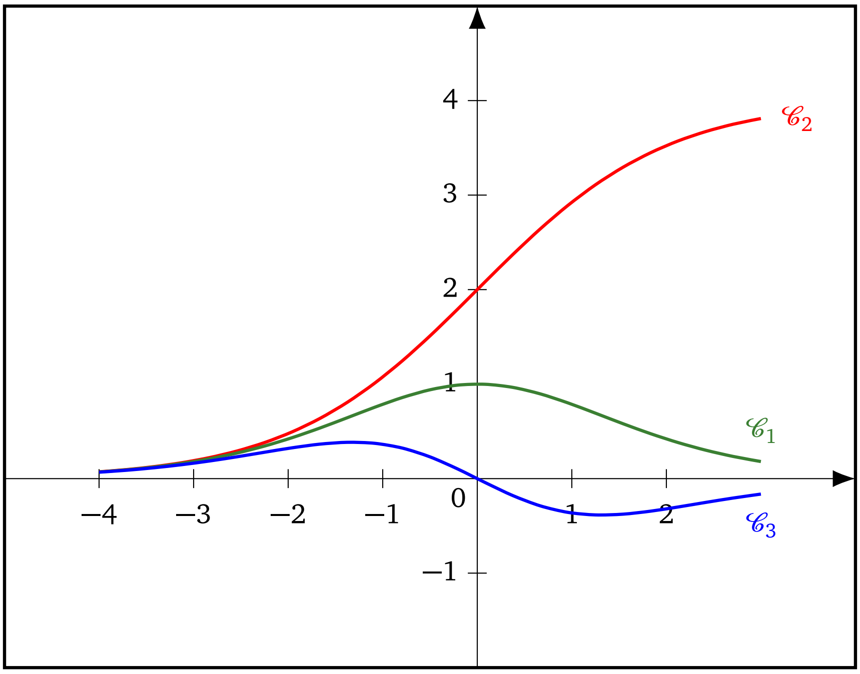
Interrogation écrite 6

- Durée : 55 minutes
- Les calculatrices ne sont pas autorisées
- Nom
- Prénom

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Le plan est ramené à un repère orthogonal.
On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que celles de sa dérivée f' et de sa dérivée seconde f''.



Déterminer, en justifiant votre choix, quelle courbe correspond à quelle fonction. 2 points

Partie B

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{4}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

1. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$. 2 points

2. Justifier que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$. On notera g' sa fonction dérivée. 1 point

3. Montrer que, pour tout réel x, $g'(x) = \dfrac{4\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x}+1)^2}$. 3 points

4. On admet que la fonction g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g'' sa fonction dérivée.

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g''(x) = \dfrac{-4\mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)}{\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)^{3}}$. 3 points

5. Étudier la convexité sur $\mathbb{R}$ de la fonction g. 3 points

6. Déterminer le ou les éventuels points d'inflexion de la courbe de g. 2 points

7. Soit d un entier naturel non nul. Soient a et b deux réels positifs. Bonus
On donne la définition suivante.

Définition d'une fonction convexe

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Soit f une fonction définie sur I.
On dit que la fonction f est convexe sur I si

$$\forall x,\ y \in \mathrm{I},\ \forall \lambda \in [0\ ;\ 1],\ f\left((1-\lambda)x+\lambda y\right) \leq (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y).$$

Montrer l'inégalité suivante.

$$(a+b)^d \leq 2^{d-1}\left(a^d+b^d\right).$$

Indication : choisir un λ convenable et étudier la convexité sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $f : x \mapsto x^d$.