

Limites de fonctions et asymptotes

Les objectifs du chapitre

Contenu

- Limite finie ou infinie d'une fonction en $+\infty$, en $-\infty$, en un point. Asymptote parallèle à un axe de coordonnées
- Limites faisant intervenir les fonctions de référence étudiées en classe de 1^{re} : puissances entières, racine carrée, fonction exponentielle
- Limites et comparaison
- Opérations sur les limites

Capacités attendues

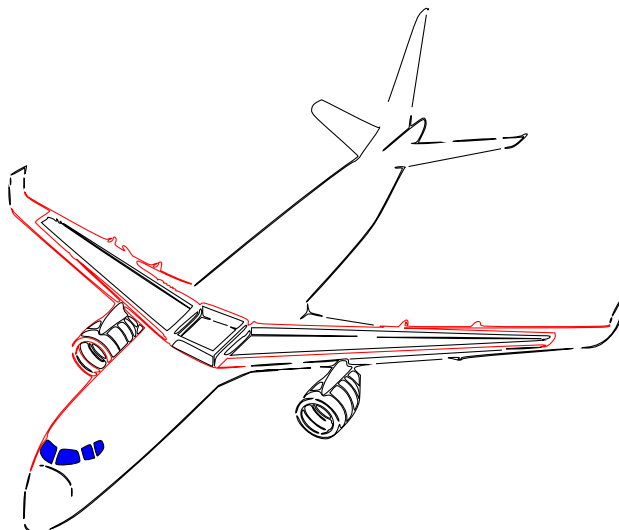
- Déterminer dans des cas simples la limite d'une suite ou d'une fonction en un point, en $\pm\infty$, en utilisant les limites usuelles, les croissances comparées, les opérations sur les limites, des majorations, minorations ou encadrements, la factorisation du terme prépondérant dans une somme
- Faire le lien entre l'existence d'une asymptote parallèle à un axe et celle de la limite correspondante.

Démonstration

- Croissance comparée de $x \mapsto x^n$ et $\exp$ en $+\infty$

Approfondissements possibles

- Asymptotes obliques. Branches infinies.



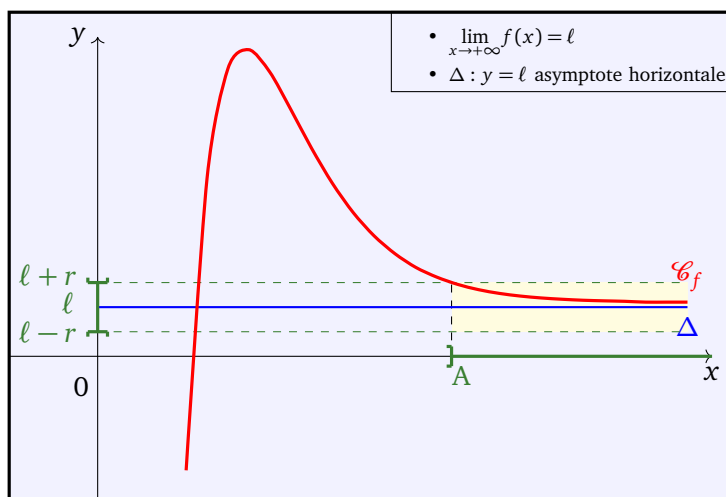
I Le cours

1. Limite finie d'une fonction en $\pm\infty$

Définition 1 : limite finie en $+\infty$

Dire qu'une fonction f a pour limite en $+\infty$ le réel ℓ , signifie que tout intervalle ouvert $]\ell - r ; \ell + r[$ où r est un réel quelconque strictement positif, contient tous les réels $f(x)$ dès que x est suffisamment grand.

- Le schéma ci-dessous montre "l'accumulation" des valeurs $f(x)$ autour du réel ℓ dès que $x > A$.
- On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.
- On dit que, dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, la droite Δ d'équation $y = \ell$ est une **asymptote horizontale** en $+\infty$ à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f .



Exemples

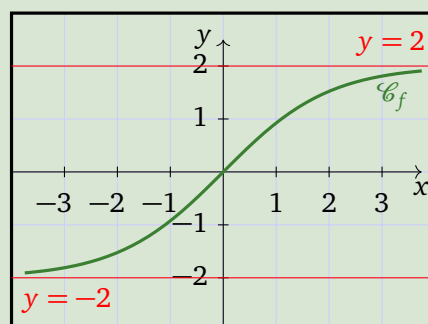
❶ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$

❷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$

On définit de façon analogue la limite d'une fonction en $-\infty$.

Méthode 1 : asymptotes horizontales

Déterminer graphiquement les asymptotes à $\mathcal{C}_f$, courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



D'après le graphique ci-dessus :

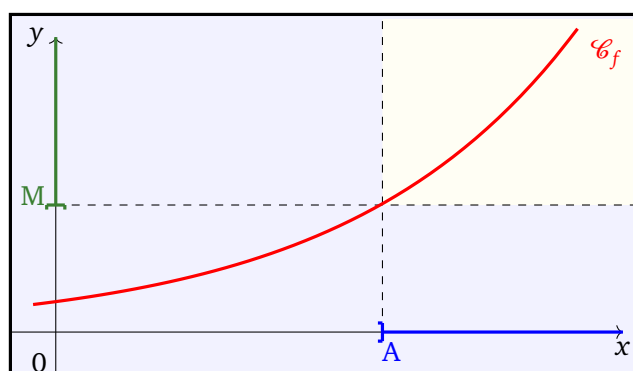
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$ donc la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote horizontale d'équation $y = -2$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ donc la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$.

2. Limite infinie d'une fonction $\pm\infty$

Définition 2 : limite infinie en $+\infty$

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, signifie que tout intervalle ouvert $]M ; +\infty[$ où M désigne un nombre réel quelconque, contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment grand.

- Le schéma ci-dessous montre que pour tout nombre M , on peut trouver un nombre $A > 0$ tel que $f(x) > M$ dès que $x > A$.
- On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.



Exemples

❶ $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

❷ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

❸ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

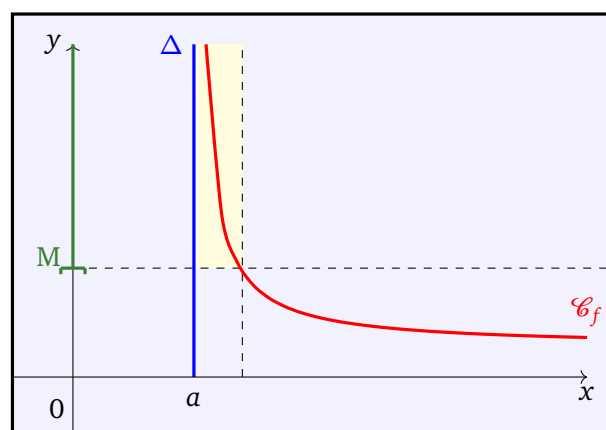
3. Limite infinie d'une fonction en un réel a

Définition 3 : limite infinie en un réel a

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit a une borne de I .

Dire que la fonction f a pour limite $+\infty$ en a , signifie que tout intervalle ouvert $]M ; +\infty[$ où M désigne un nombre réel quelconque, contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de a .

- Lorsque $x > a$, on parle de limite à droite de a et on note $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$.
- On dit que, dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, la droite Δ d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe $\mathcal{C}_f$ de f .
- En général, si une fonction f a une valeur interdite en a , (penser à la fonction $x \mapsto \frac{1}{x-a}$), alors les valeurs $f(x)$ deviennent très grandes lorsque x s'approche de a . On dit que les valeurs $f(x)$ explosent et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$.



Exemples

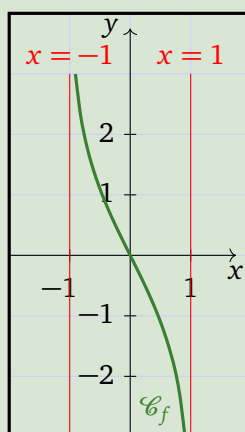
❶

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

❷ $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$

Méthode 2 : asymptotes verticales

Déterminer graphiquement les asymptotes à $\mathcal{C}_f$, courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



D'après le graphique ci-dessus :

- $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ donc la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ donc la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

4. Opérations sur les limites

Limite d'une somme

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Et si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $f + g$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Limite d'un produit

Si f a pour limite	ℓ	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	0
Et si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	∞
Alors $f g$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Limite d'un quotient

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Et si g a pour limite	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\pm\infty$
Alors $\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Méthode 3 : opérations sur les limites

Déterminer chacune des limites suivantes.

❶ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 4x)$

❷ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sqrt{x}$

❸ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - x^2}$

❹ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$

Solution

❶ On a

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x = -\infty \end{cases} \quad \text{donc par somme des limites} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 4x) = -\infty.}$$

❷ On a

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \end{cases} \quad \text{donc par produit des limites} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sqrt{x} = +\infty.}$$

❸ On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x^2) = -\infty \quad \text{par inverse} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - x^2} = 0.}$$

❹ Par somme des limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$.

On effectue le changement de variables $X = 1 + \frac{1}{x^2}$.

On a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$.

Par composition, on obtient $\lim_{X \rightarrow 1} \sqrt{X} = 1$. Autrement dit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = 1$.

Il en résulte que

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1.}$$

5. Comparaison et encadrement

La fonction $x \mapsto \sin x$ n'admet pas de limite au voisinage de l'infini. Cependant $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^3} = 0$ comme on le verra dans cette section.

Le théorème qui suit a pour objet de déterminer l'éventuelle limite d'une fonction g en l'encadrant entre deux fonctions f et h de même limite finie.

Propriété 1 : théorème des gendarmes

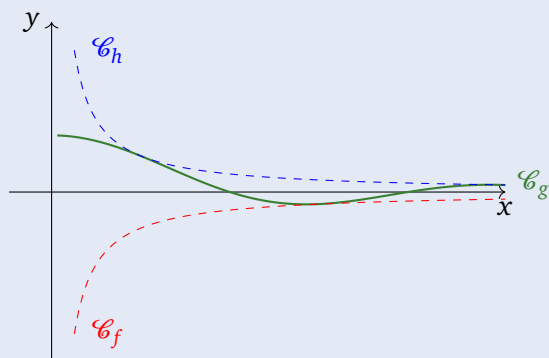
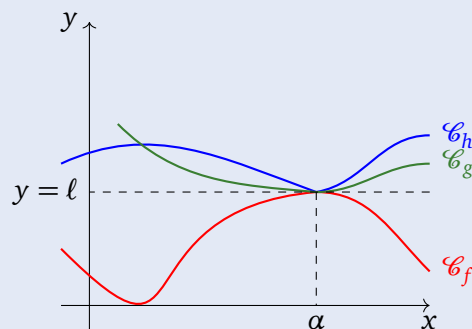
On pose $I =]a ; +\infty[$ où a désigne soit un nombre réel, soit $-\infty$.

On considère trois fonctions f, g et h définies sur I et on suppose que :

➤ pour tout $x \in I$: $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$;

➤ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.

Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$.

Théorème des gendarmes en $+\infty$ Théorème des gendarmes en $\alpha \in \mathbb{R}$ 

Méthode 4 : utilisation du théorème des gendarmes

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^3}$

Solution

On cherche la limite en $+\infty$, on peut donc prendre $x > 0$. Pour de tels x , on a $-1 \leq \sin x \leq 1$ et $x^3 > 0$.

Donc $\frac{-1}{x^3} \leq \frac{\sin x}{x^3} \leq \frac{1}{x^3}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$.

Ainsi par le théorème des gendarmes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^3} = 0.$$

Le théorème suivant permet de montrer par exemple que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \cos(2x)) = +\infty$. On pourra étudier la méthode 5 pour s'en convaincre.

Propriété 2 : théorème de comparaison

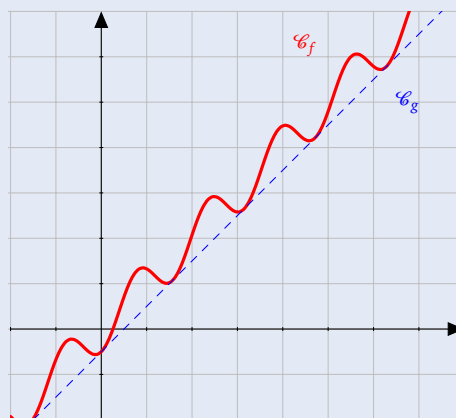
Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $I =]a ; +\infty[$, où a désigne soit un nombre réel, soit $-\infty$.

On suppose que :

➤ pour tout $x \in I$, $g(x) \leq f(x)$;

➤ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.



Le théorème de comparaison des limites s'applique de façon similaire en $-\infty$.

Méthode 5 : utilisation du théorème de comparaison

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \cos(2x))$

Solution

Pour tout réel x , $-1 \leq \cos(2x) \leq 1$, soit $x - \cos(2x) \geq x - 1$.

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \cos(2x)) = +\infty$.

6. Quelques méthodes pour déterminer une limite

Dans cette section, on propose sous forme de méthodes, quelques techniques de calculs pour lever certaines indéterminations.

Méthode 6 : forme indéterminée du type $+\infty - \infty$ pour les fonctions polynômes

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - x + 1)$.

Solution

En factorisant par le plus haut degré x^3 , on obtient pour tout $x \neq 0$

$$2x^3 - x + 1 = x^3 \left(2 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right).$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$, donc par somme des limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = 2$.

Ainsi

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \end{array} \right. \quad \text{donc par produit des limites} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - x + 1) = +\infty.}$$

On retiendra le théorème suivant, **valable uniquement en l'infini** :

Propriété 3 : limite en l'infini d'une fonction polynomiale

La limite en l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite de son monôme de plus haut degré.

Soit P un polynôme défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, où $a_n \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n.}$$

Démonstration

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$P(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right).$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) = a_n$.

Donc par produit des limites, on conclut que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n.$$

Méthode 7 : forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$ pour les fonctions rationnelles

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1-x^3}{x^2+x+1}$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Solution

$$\text{Pour tout } x \neq 0, \frac{1-x^3}{x^2+x+1} = \frac{x^3 \left(\frac{1}{x^3} - 1 \right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} = \frac{x \left(\frac{1}{x^3} - 1 \right)}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

$$\text{Or, } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{1}{x^3} - 1 \right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = 1 \end{cases} \quad \text{donc par quotient des limites} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(\frac{1}{x^3} - 1 \right)}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = +\infty.$$

Autrement dit,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.}$$

On retiendra le théorème suivant, **valable uniquement en l'infini** :

Propriété 4 : limite en l'infini d'une fonction rationnelle (propriété admise)

La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite du rapport des termes de plus haut degré.

Exemples

❶ En reprenant l'exemple de la méthode 7, on peut écrire

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x^3}{x^2+x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty.$$

❷

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5 - 3x + 7}{3x + 11} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} x^4 = +\infty.$$

❸ La propriété 4 s'applique même pour des fonctions non rationnelles.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 - \frac{3}{x} \right)}{\sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

Méthode 8 : forme indéterminée du type "0 sur 0" pour les fonctions rationnelles

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$.

Solution

Pour tout réel $x \neq 2$ et $x \neq -2$, on a $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+3}{x+2}$.

$$\text{Or, } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2} (x+3) = 5. \\ \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4 \end{cases} \quad \text{donc par quotient des limites} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{5}{4}.}$$

Méthode 9 : forme indéterminée en un point du type "k sur 0; k ≠ 0"

Soit f la fonction définie sur $] -\infty ; 3[\cup]3 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+7}}{3-x}$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

Solution

Le dénominateur de f s'annule et change de signe en 3. On étudie donc le signe de $3-x$ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
Signe de $3-x$	$+$	0	$-$

On distingue alors deux limites :

- À gauche en 3, c'est-à-dire au voisinage de 3 par valeurs inférieures.

On a $\lim_{x \rightarrow 3^-} (3-x) = 0^+$ et donc

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{x^2+7} = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} (3-x) = 0^+ \end{cases} \quad \text{par quotient des limites} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty.}$$

- À droite en 3, c'est-à-dire au voisinage de 3 par valeurs supérieures.

On a $\lim_{x \rightarrow 3^+} (3-x) = 0^-$ et donc

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x^2+7} = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} (3-x) = 0^- \end{cases} \quad \text{par quotient des limites} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty.}$$

Méthode 10 : forme indéterminée du type "0 sur 0" pour les fonctions irrationnelles

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1}$.

Solution

Pour $x \geq -3$ et $x \neq 1$, à l'aide de l'expression conjuguée, on a

$$\frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1} = \frac{(2-\sqrt{x+3})(2+\sqrt{x+3})}{(x-1)(2+\sqrt{x+3})} = \frac{4-(x+3)}{(x-1)\sqrt{2+\sqrt{x+3}}} = \frac{-1}{2+\sqrt{x+3}}$$

Par inverse, on conclut que

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1} = \frac{-1}{4}.}$$

7. Limites et fonction exponentielle**Propriété 5 : limites à l'infini de la fonction exponentielle**

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+}.$$

Démonstration

Voir l'exercice 10.

Propriété 6 : théorème des croissances comparées

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0.$$

Le premier point dit que la fonction exponentielle "écrase" toute puissance au voisinage de l'infini.

Démonstration (exigible)

Voir l'exercice 14.

Méthode 11 : utilisation du théorème des croissances comparées

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^5)$.

Solution

Pour tout réel $x \neq 0$, on a

$$e^x - x^5 = x^5 \left(\frac{e^x}{x^5} - 1 \right).$$

Or, d'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^5} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x^5} - 1 \right) = +\infty$.

Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty$, donc par produit des limites, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^5) = +\infty.$$

Propriété 7 : dérivée de la fonction exponentielle en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Démonstration

Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$. On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

Or, la fonction f est dérivable en 0, donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = e^0 = 1.$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

II Les exercices

Exercice 1 Limites en l'infini

Déterminer chacune des limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1)$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-2)^2(x+1)}{x^2+7}$

7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x}+2}$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3+5}$

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{x} - 5 \right)$

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{(1-2x)^3}$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x^7 + 8x^6 + 13)$

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 + 4x + \frac{2}{x} \right)$

9. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^2 + x + 1}$

Exercice 2 Limites en un nombre réel

Déterminer chacune des limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

3. $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$

5. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2-\sqrt{x}}{x-4}$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}$

4. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x-3}$

6. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$

Exercice 3 Comparaison et encadrement

Déterminer chacune des limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^2}$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \cos x + x}{\sin(x^2) + 2}$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (5 + \sin x)$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - \cos x}{4x^2 + 1}$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x + \sin x}{x-1}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 \cos\left(\frac{1}{x^3}\right)$

Exercice 4 Composition de limites

Déterminer chacune des limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{x}{x-1}\right)$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{5x^2 + 2x + 3}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$

Exercice 5 Limites de fonctions définies par radicaux

Déterminer chacune des limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}$

2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{\sqrt{x+1} - 2}$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x^2+7}}{x}$

Exercice 6 Limites avec exponentielle

Déterminer chacune des limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3-2x)e^x$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} - 1}{-1 - 2e^x}$

7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-2x} - 1}{2 - e^x}$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{4 - e^x}$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5-3x)e^x$

8. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x} + 1}{1 + e^x}$

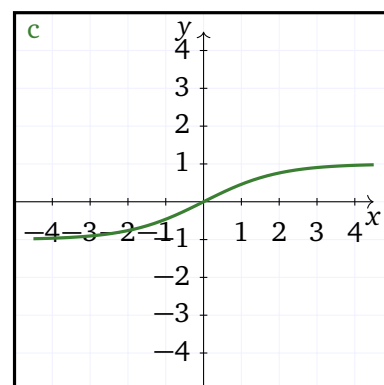
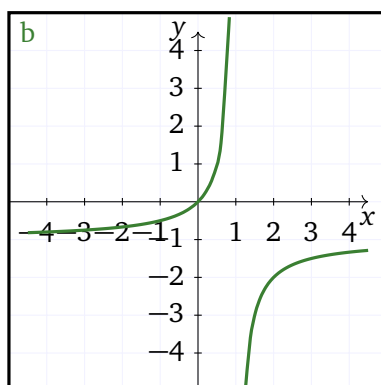
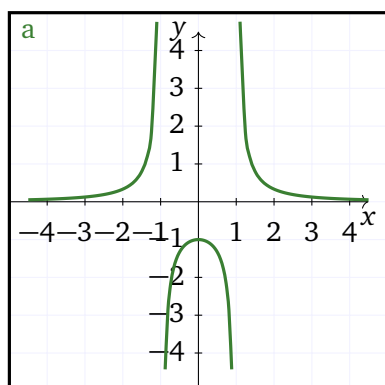
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-2x} - 1}{4 - e^x}$

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^{2x} - 1}{1 - e^{2x}}$

9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{9e^{\frac{-x}{2}} + 1}$

Exercice 7 Lecture graphique

Associer à chaque fonction sa courbe représentative.



1. $f : x \mapsto \frac{1 - e^{-x}}{e^{-x} + 1}$

2. $g : x \mapsto \frac{x}{1 - x}$

3. $h : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}$

Exercice 8 La règle de L'Hôpital

En 1696 le marquis de L'Hôpital publie son ouvrage *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* dans lequel il expose une méthode pour lever certaines indéterminations du type $\frac{0}{0}$. Cette méthode est en réalité découverte vers 1691/1692 par le mathématicien suisse Jean Bernoulli.

Propriété 8 : règle de L'Hôpital

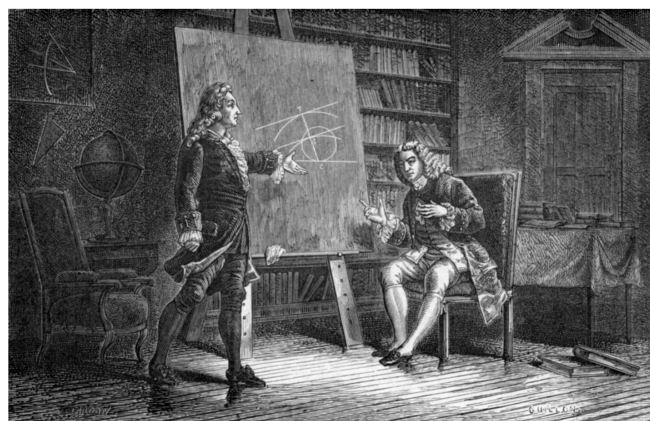
Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle $]a ; b[$ telles que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a ; b[$.

On suppose que :

► $f(a) = g(a) = 0$

► $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.



1. Prouver la règle de L'Hôpital. On rappelle que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$.

2. À l'aide la règle de L'Hôpital, déterminer les limites suivantes.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x + 1}{x - \pi}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^5 + 3x^2}$

On pourra utiliser le fait que $(\sin)' = \cos$ et $(\cos)' = -\sin$.

3. On admet que la règle de L'Hôpital s'applique sur les indéterminations du type $\frac{\infty}{\infty}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer le théorème des croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{n!} = +\infty$.

Exercice 9 Tableau de variations d'une fonction

On considère la tableau de variations d'une fonction f définie sur $] -\infty ; 1[\cup] 1 ; +\infty[$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Variations de f	-1 $\nearrow$ $+\infty$	$-\infty$ $\nearrow$ -1	

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. En déduire les équations des éventuelles asymptotes à la courbe représentative de f .
3. Déterminer la valeur de a sachant que pour tout $x \neq 1$, $f(x) = \frac{ax}{1-x}$.

Exercice 10 Limites en l'infini de la fonction exponentielle

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x \geq 1 + x$.
2. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.
3. Que peut-on dire de $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$?

Exercice 11 Asymptotes 1

Soit la fonction f définie sur $] -\infty ; -2[\cup] -2 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{-3}{2+x}$.

1. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
2. En déduire les équations des éventuelles asymptotes à la courbe représentative de f .

Exercice 12 Asymptotes 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2e^x - 3}{2 + e^x}$.

1. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
2. En déduire les équations des éventuelles asymptotes à la courbe représentative de f .

Exercice 13 Croissances comparées

Déterminer chacune des limites suivantes.

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 2x)e^x$ | 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2xe^{2x}$ | 5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x+1}}{3x^4}$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - e^x)$ | 4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2xe^x)$ | 6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x}$ |

Exercice 14 Démonstration exigible

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

Partie A : cas $n = 1$

1. Donner une expression de la dérivée f' de f .
2. Déterminer le signe sur $\mathbb{R}$ de la fonction dérivée f' .
Indication : on pourra penser à dériver une seconde fois.
3. En déduire que pour tout réel x strictement positif,

$$\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}.$$

4. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Partie B : cas $n > 1$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on a

$$\frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} \right)^n \times \left(\frac{1}{n} \right)^n.$$

2. On pose $X = \frac{x}{n}$.

Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

Exercice 15 Asymptote et position relative

Soit la fonction f définie sur $\left] \frac{1}{3} ; +\infty \right[$ par $f(x) = \frac{5x+1}{3x-1}$.

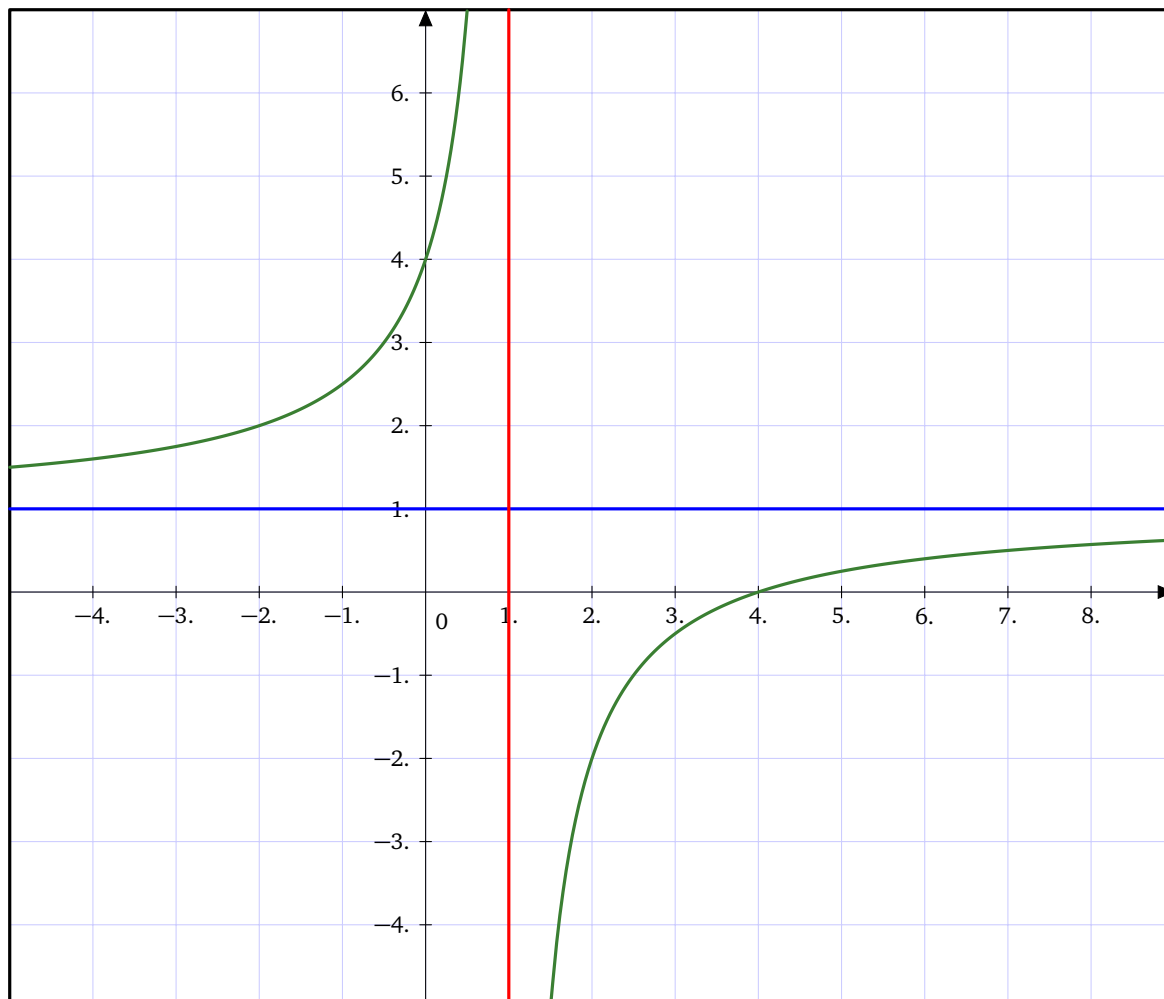
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- En déduire l'existence d'une asymptote horizontale Δ la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f .
- Étudier la position relative de Δ par rapport à $\mathcal{C}_f$.

Exercice 16 Lecture graphique de limites

On considère une fonction f définie sur $I =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

On donne, dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de f .

Conjecturer les limites de f aux bornes de son domaine de définition I et donner les éventuelles équations asymptotes à la courbe de f .



Exercice 17

Asymptotes obliques 1

Définition 4 : asymptote oblique à une courbe

Dire que la droite d'équation $y = ax + b$, où $a \neq 0$, est une asymptote oblique à la courbe représentative d'une fonction f en $+\infty$, signifie que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par

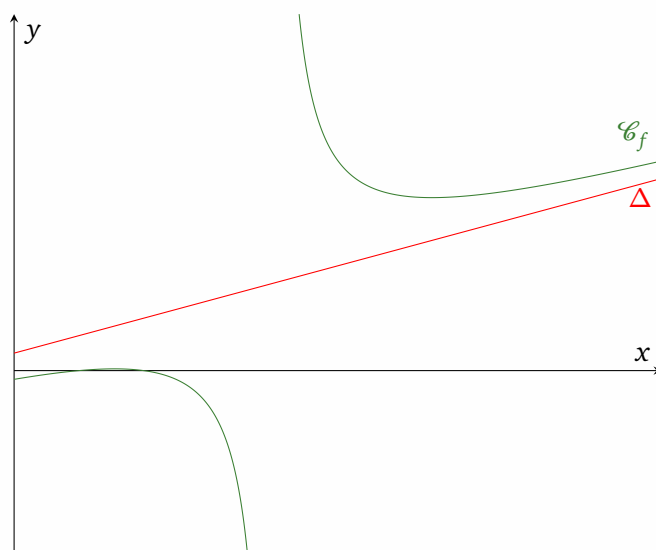
$$f(x) = 2x + 1 + \frac{3}{x-2}.$$

Pour tout réel $x \neq 2$, on a

$$f(x) - (2x + 1) = \frac{3}{x-2}.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x-2} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = 0$.

Il en résulte que la droite Δ d'équation $y = 2x + 1$ est une asymptote oblique en $+\infty$ à la courbe de f .



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 5}{x + 2}.$$

1. Déterminer les réels a , b et c tels que

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}.$$

2. En déduire que la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ainsi que les éventuelles asymptotes à la courbe de la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par

$$g(x) = \frac{7x^2 + 6x + 2}{x - 1}.$$

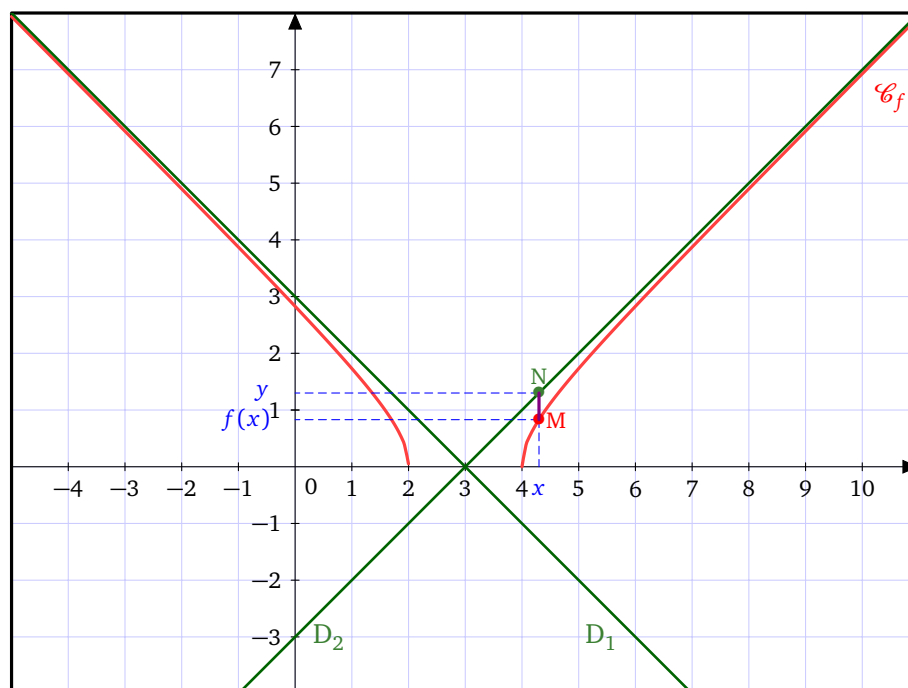
Exercice 18

Asymptotes obliques 2

Soit la fonction f définie sur $I =]-\infty ; 2] \cup [4 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{(x-2)(x-4)}$.

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on a construit dans un repère orthonormé du plan la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de cette fonction ainsi que les droites D_1 et D_2 , appelées asymptotes obliques à $\mathcal{C}_f$.

Le but de cet exercice est de déterminer les équations réduites de ces deux droites.



1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. (a) Établir que pour tout réel $x \neq 0$ de I , $\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{(x-2)(x-4)}}{x} = \frac{|x|}{x} \sqrt{1 - \frac{6}{x} + \frac{8}{x^2}}$.

(b) En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. On note a cette valeur.

3. (a) Établir pour tout réel $x \neq 0$ de I , $f(x) - x = \frac{-6x \left(1 - \frac{4}{3x}\right)}{|x| \sqrt{1 - \frac{6}{x} + \frac{8}{x^2}} + x}$.

(b) En déduire la valeur de b définie par $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$.

4. La droite D_2 a pour équation $y = ax + b$.

Soient M et N deux points situés respectivement sur $\mathcal{C}_f$ et D_2 de **même abscisse** x , réel de I .

(a) Calculer en fonction de x , MN^2 .

(b) Établir que pour tout réel $x \geq 4$

$$x - 3 - \sqrt{x^2 - 6x + 8} = \frac{1}{x} \left[\frac{1}{1 - \frac{3}{x} + \sqrt{1 - \frac{6}{x} + \frac{8}{x^2}}} \right].$$

(c) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 3 - \sqrt{x^2 - 6x + 8})$.

(d) Que peut-on dire de la position des points M et N lorsque x tend $+\infty$?

5. (a) Pour tout réel x de I , calculer $f(3-x)$ et $f(3+x)$.

(b) En déduire que la droite Δ d'équation $x = 3$ est un axe de symétrie pour la courbe $\mathcal{C}_f$.

(c) Donner l'équation réduite de la droite D_1 symétrique de D_2 par rapport à la droite Δ .