

Chapitre 2

Géométrie dans l'espace 1

I Le cours

1. Vecteurs de l'espace

On munit l'espace d'un repère **orthonormé** $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on considère les points $A(x_A ; y_A ; z_A)$, $B(x_B ; y_B ; z_B)$, $C(x_C ; y_C ; z_C)$ et $D(x_D ; y_D ; z_D)$.

1. On définit le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par :

- sa **direction** : la droite (AB) ;
- son **sens** : de A vers B ;
- sa **norme** $\|\overrightarrow{AB}\|$: égale à la longueur AB avec $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

2. Deux vecteurs de l'espace $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **égaux** si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

3. On a la **relation de Chasles** : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

4. On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

Michel Chasles

Ancien élève de l'École polytechnique, Michel Chasles (1793 - 1880), est un mathématicien français et membre de l'académie des sciences.

Travaillant sur les coniques, il démontre le résultat suivant : soient cinq coniques (ellipses, paraboles ou hyperboles) dans un plan ; il existe 3 264 coniques tangentes à ces cinq-là.

Il a par ailleurs inventé le mot homothétie et introduit le birapport de quatre points alignés, puissant outil de la géométrie projective.

⚠ Bien que son nom soit attaché à la relation de Chasles, cette propriété était connue et utilisée longtemps avant lui. Cependant les travaux de Chasles en géométrie ont largement contribué à son adoption dans le monde francophone.



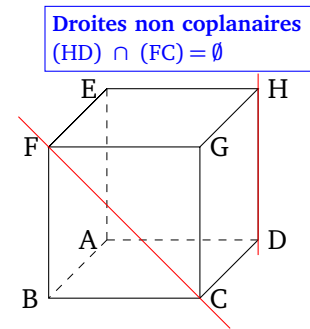
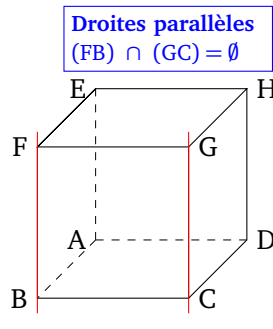
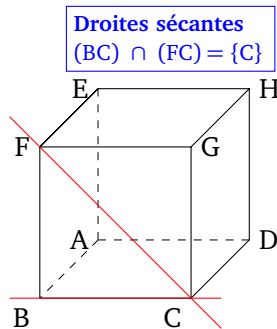
2. Droites de l'espace

Soient A et B deux points distincts de l'espace.

- La **droite** (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, avec $k \in \mathbb{R}$.
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un **vecteur directeur** de la droite (AB) .
- La droite (AB) est entièrement déterminée par la donnée d'un point de (AB) et d'un vecteur directeur.
- La notation $d(A, \vec{u})$ désigne la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

3. Position relative de deux droites de l'espace

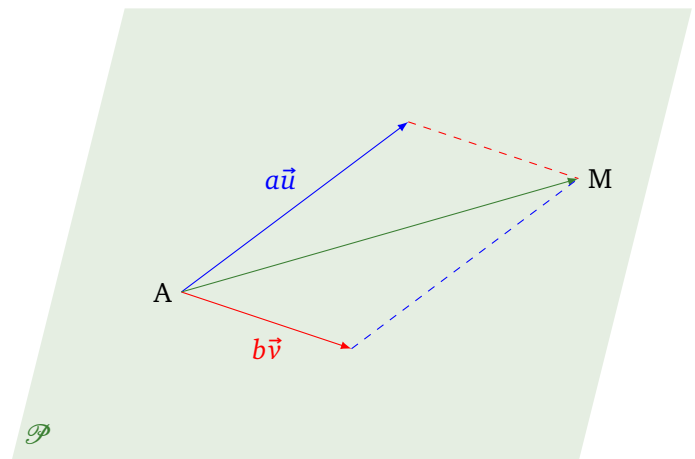
- Deux droites d et d' sont **coplanaires** lorsqu'elles appartiennent à un même plan : elles sont soit sécantes, soit parallèles.
- Deux droites d et d' sont **non coplanaires** lorsqu'elles ne sont ni parallèles ni sécantes.



4. Plans de l'espace

Un point A et deux vecteurs **non colinéaires** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définissent un unique plan : le plan (ABC) où les points B et C sont tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des **vecteurs directeurs** du plan (ABC).
- Ce plan peut également être noté par $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$.
- Théorème** : Le point M appartient au plan $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ si et seulement si il existe deux nombres réels a et b tels que $\overrightarrow{AM} = a\vec{u} + b\vec{v}$.
On dit que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une **base** de ce plan.
- Conséquence** : $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires**, si et seulement si, il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$. On dit que $\vec{w}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

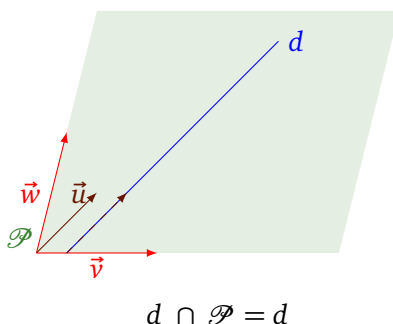


5. Position relative d'une droite et d'un plan de l'espace

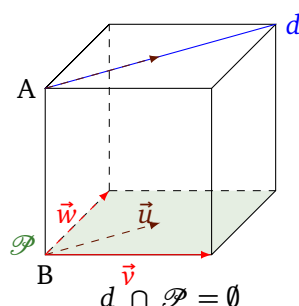
On considère une droite $d(A, \vec{u})$ et un plan $\mathcal{P}(B; \vec{v}, \vec{w})$ de l'espace.

- On dit que la droite $d(A, \vec{u})$ est **parallèle** au plan $\mathcal{P}(B; \vec{v}, \vec{w})$ si $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires**.
- La droite d n'est pas parallèle au plan $\mathcal{P}$ lorsqu'elle admet un **unique point d'intersection** avec $\mathcal{P}$.
- Une droite peut être parallèle, strictement parallèle ou sécante à un plan.

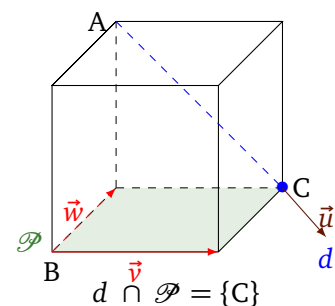
d est incluse dans $\mathcal{P}$



d est strictement parallèle à $\mathcal{P}$



d et $\mathcal{P}$ sont sécants en C

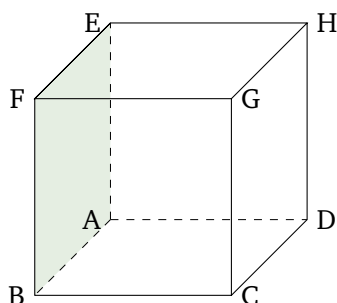


6. Position relative de deux plans de l'espace

Deux plans de l'espace peuvent être : confondus, strictement parallèles ou sécants en une droite.

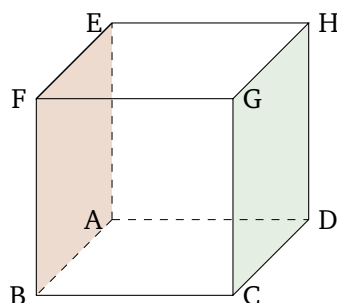
1. confondus

$$(FBA) \cap (FEA) = (FEA)$$



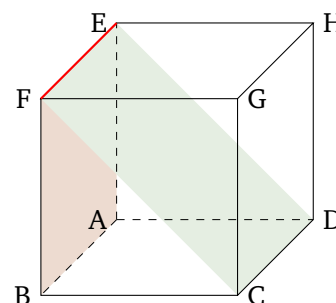
2. strictement parallèles

$$(HDC) \cap (FEA) = \emptyset$$



3. sécants en une droite

$$(EDC) \cap (EAB) = (FE)$$



7. Vecteurs linéairement indépendants et base de l'espace

Définition 1 : vecteurs linéairement indépendants

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

α , β et γ désignent trois nombres réels.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont dits **linéairement indépendants** lorsqu'ils ne sont pas coplanaires.

Autrement dit, lorsque

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \quad \implies \quad \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Définition 2 : base de l'espace

Trois vecteurs linéairement indépendants forment une base de l'espace.

Exemple

Les vecteurs $\vec{i} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants.

En effet, en supposant qu'il existe trois réels α , β et γ tels que $\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k} = \vec{0}$, on obtient $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
Ainsi $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de l'espace.

Propriété 1 : décomposition dans une base

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il **existe un unique triplets de réels** $(a ; b ; c)$ tel que $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.

On note alors $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et on dit que $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ sont les **coordonnées** du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



Les coordonnées d'un vecteur dépendent de la base choisie.

Définition 3 : Repère de l'espace

Soit O un point de l'espace et soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base des vecteurs de l'espace.

$(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est appelé **repère** de l'espace.

8. Représentation paramétrique d'une droite

Propriété 2 : représentation paramétrique d'une droite

La droite d passant par le point $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet pour **représentation**

paramétrique le système
$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Remarques

- À chaque valeur du paramètre t correspond un point de la droite d .
- Une droite d admet **une infinité** de représentations paramétriques.

Démonstration

$$\begin{aligned} M(x ; y ; z) \in d &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \text{il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x - x_A = at \\ y - y_A = bt \\ z - z_A = ct \end{cases} \Leftrightarrow \text{il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \end{aligned}$$

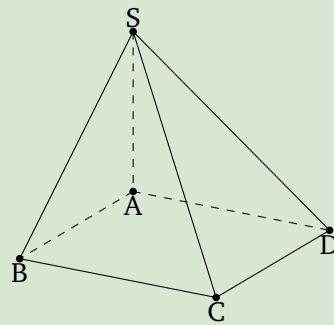
9. Méthodes et rédaction

Méthode 1 : montrer que trois vecteurs sont coplanaires

On considère une pyramide SABCD de sommet S dont la base est le parallélogramme ABCD.

Soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DS}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AS}$.

Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.



Solution

Par la relation de Chasles, on a

$$\vec{w} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AS}.$$

Or, ABCD est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

Il s'ensuit que $\vec{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AS}$.

En appliquant la relation de Chasles une deuxième fois, on obtient

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DS} = \overrightarrow{AB} + \underbrace{2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DS}}_{\vec{v}} = \vec{u} + \vec{v}.$$

Il en résulte que $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Autrement dit,

les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Méthode 2 : obtenir une représentation paramétrique d'une droite

Dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1 ; 2 ; 3)$ et $B(-2 ; 0 ; 5)$.
Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) .

Solution

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) . De plus, le point $A(1 ; 2 ; 3)$ appartient à (AB) .

Ainsi

une représentation paramétrique de (AB) est donnée par le système $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$
--

Méthode 3 : montrer que trois vecteurs sont linéairement indépendants

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace.

On considère les vecteurs $\vec{u} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$ et $\vec{w} = 2\vec{i} + 2\vec{k}$.

Donner les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, puis montrer qu'ils sont linéairement indépendants. Que peut-on en déduire ?

Solution

On a

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Montrons que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants.

On suppose qu'il existe trois réels α , β et γ tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$ et montrons que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

On a

$$\begin{aligned} \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - 2\beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + 2\gamma = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \beta = -\alpha \\ \gamma = -\alpha \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \alpha - \alpha = 0 \\ \beta = -\alpha \\ \gamma = -\alpha \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Il en résulte que $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ce qui veut dire que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants.
Il s'ensuit que

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.

II Les exercices

Exercice 1 Colinéarité de vecteurs

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(2 ; 0 ; 9)$, $B(1 ; 6 ; 12)$ et $C(5 ; -18 ; 0)$.

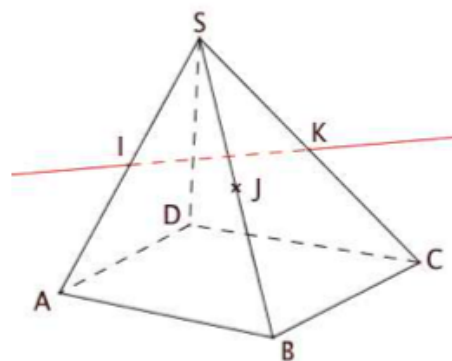
1. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Montrer que ces vecteurs sont colinéaires.
3. Donner les coordonnées du point I, milieu du segment $[AB]$.

Exercice 2 Plans parallèles

Soit $SABCD$ une pyramide. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[SA]$, $[SB]$ et $[SC]$.

1. Montrer que la droite (IK) est parallèle au plan (ABC) .
2. Démontrer que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles. On pourra utiliser la propriété suivante :

Si un plan contient deux droites sécantes et parallèles à un autre plan, alors ces deux plans sont parallèles.

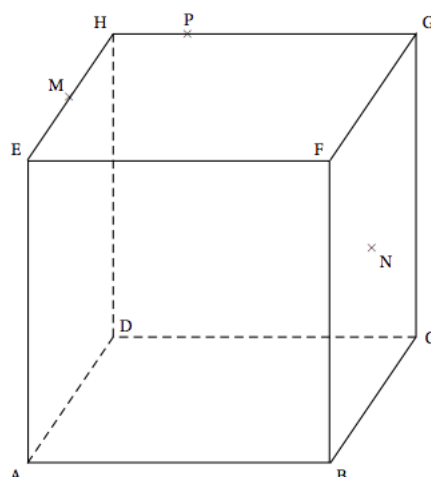


Exercice 3 Section d'un cube par un plan

On considère un cube $ABCDEFGH$.

On note M le milieu du segment $[EH]$, N celui de $[FC]$ et P le point tel que $\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$.

1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L. Construire le point L.
2. On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection. On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.
 - (a) Construire les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.
 - (b) Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF) .
 - (c) En déduire une construction de la section du cube par le plan (MNP) .
3. L'espace est rapporté au repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
Donner les coordonnées des points M, N et P dans ce repère.

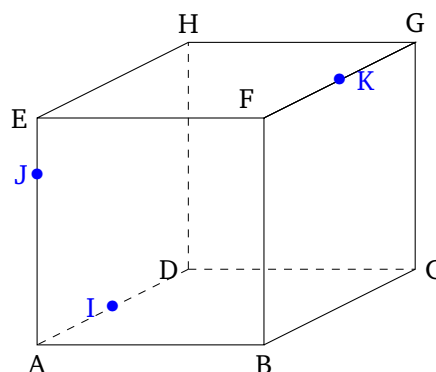


Exercice 4 D'après Bac 2018

Soit ABCDEFGH un cube. On définit les points I, J et K de la manière suivante :

- I est le milieu de [AD]
- K est le milieu de [FG]
- J est tel que $\vec{AJ} = \frac{3}{4}\vec{AE}$.

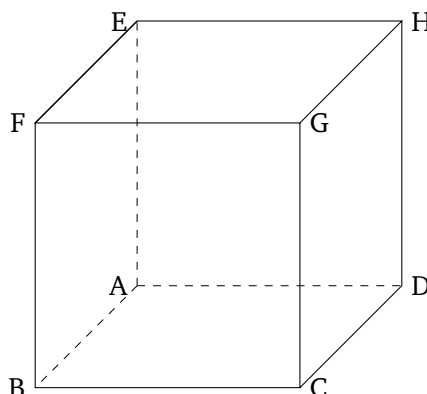
1. Construire sur la figure ci-contre, en justifiant la réponse, le point d'intersection L de la droite (EH) et du plan (IJK).
2. Quelle est l'intersection des deux plans (EFG) et (IJK) ?

**Exercice 5** Q.C.M

Pour chaque question, choisir la bonne réponse.

Dans toute la suite, l'espace est muni d'un repère orthonormé.

1. On considère les points $A(1 ; -1 ; 0)$ et $B(1 ; 1 ; 4)$.
Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées :
 - A. $I(0 ; -1 ; -2)$
 - B. $I(0 ; 1 ; 2)$
 - C. $I(1 ; 0 ; 2)$
2. On considère les points $A(0 ; 2 ; 3)$, $B(1 ; 4 ; 0)$ et $C(3 ; -1 ; -2)$.
 - A. Les points A, B et C sont alignés
 - B. Les points A, B et C ne sont pas alignés
 - C. $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB)
3. Soit ABCDEFGH un cube dans l'espace muni du repère $(A ; \vec{AB}, \vec{AE}, \vec{AD})$.
Les coordonnées du vecteur $\vec{HC}$ sont :
 - A. $(1 ; -1 ; 0)$
 - B. $(1 ; 0 ; 1)$
 - C. $(1 ; 1 ; 0)$
4. On considère le cube ABCDEFGH ci-dessous.



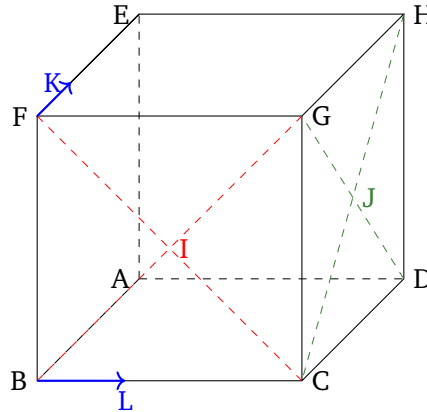
Les droites (AE) et (FG) :

- A. sont sécantes
- B. sont parallèles
- C. ne sont pas coplanaires

5. Soit ABCDEFGH un cube.

Les points I et J désignent les centres respectifs des faces BCGF et CDHG.

Les points K et L sont tels que : $\vec{FK} = \frac{1}{3}\vec{FE}$ et $\vec{BL} = \frac{1}{3}\vec{BC}$.



- A. Les vecteurs $\vec{FB}$, $\vec{KL}$ et $\vec{CE}$ sont coplanaires
- B. $\vec{KL} = \frac{2}{3}\vec{FB} + \frac{1}{3}\vec{CE}$
- C. $\vec{AC} = \vec{FB} + \vec{CE}$

Exercice 6 Position relative de deux droites

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère deux droites d et d' de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = -2 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 2 - t' \\ y = 4 + t' \\ z = 2 - t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$$

- 1. Les droites d et d' sont-elles parallèles ?
- 2. Étudier l'intersection de d et d' .

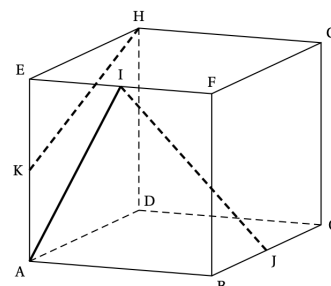
Exercice 7 D'après Bac 2021

ABCDEFGH est un cube. Les points I, J et K sont les milieux respectifs de [EF], [BC] et [AE].

- 1. Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles ?

Dans la suite, on se place dans le repère orthonormé $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

- 2. (a) Donner les coordonnées des points I et J.
- (b) Montrer que les vecteurs $\vec{IJ}$, $\vec{AE}$ et $\vec{AC}$ sont coplanaires.



On considère les droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques ci-dessous :

$$d_1 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 8 - 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 + t \\ z = 8 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

3. Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Justifier la réponse.

Exercice 8

Q.C.M 2

Pour chacune des questions ci-dessous, une seule affirmation est exacte.

L'espace rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit d la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -3 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

1. A. Le point M de coordonnées $(-1 ; 3 ; 2)$ appartient à d
 B. Le point N de coordonnées $(2 ; -1 ; -1)$ appartient à d
 C. Le point R de coordonnées $(3 ; 1 ; -4)$ appartient à d
2. A. Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d
 B. Le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d
 C. Le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d

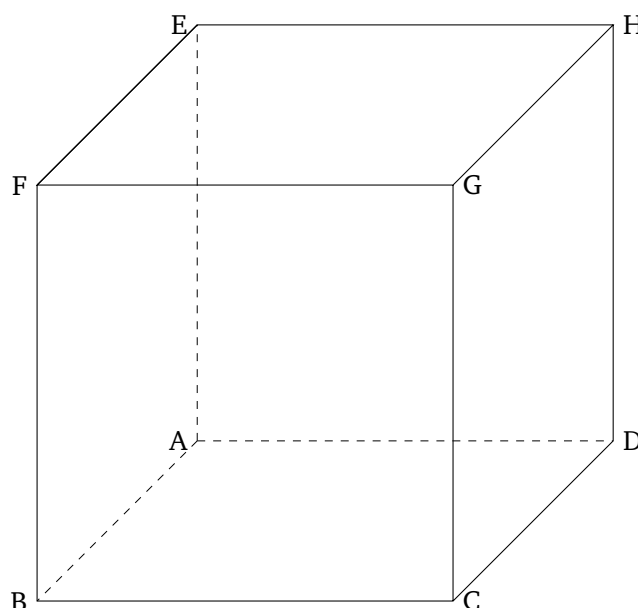
Exercice 9

Inspiré d'un exercice de Bac

On considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.

On se place dans le repère orthonormé $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

On considère les points $I\left(1 ; \frac{1}{3} ; 0\right)$, $J\left(0 ; \frac{2}{3} ; 1\right)$, $K\left(\frac{3}{4} ; 0 ; 1\right)$ et $L(a ; 1 ; 0)$ avec a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$.



Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).
2. Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4} + t' \left(a - \frac{3}{4} \right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$$

3. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes, si et seulement si, $a = \frac{1}{4}$.

Partie B

Dans la suite de l'exercice, on pose $a = \frac{1}{4}$. Le point L a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4} ; 1 ; 0 \right)$.

1. Démontrer que le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.
2. Calculer $\|\vec{IK}\|$ et $\|\vec{LJ}\|$.
3. Montrer que les vecteurs $\vec{IK}$ et $\vec{LJ}$ ont les mêmes coordonnées. Que peut-on en déduire ?

Exercice 10 Combinaisons linéaires 1

Soit ABCDEFGH un pavé droit.

Soit Ω le centre du rectangle ABCD.

On considère les vecteurs $\vec{u} = 3\vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{FH} + \vec{CH}$ et $\vec{w} = 3\vec{A\Omega} + \vec{\Omega E}$.

Montrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Exercice 11 Vecteurs linéairement indépendants

Dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les vecteurs

$$\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{j} + \vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{w} = \frac{1}{2}(\vec{i} + \vec{k}).$$

Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants.

Exercice 12 Combinaisons linéaires 2

Dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les vecteurs

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{w} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer deux nombres réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.
2. Que peut-on en déduire ?

Exercice 13 Points alignés

L'espace est rapporté au repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points

$$A(1 ; 2 ; 1), \quad B(2 ; -1 ; 3) \quad \text{et} \quad C(3 ; -4 ; x) \quad \text{où } x \in \mathbb{R}.$$

Déterminer la valeur du réel x pour que les trois points A, B et C soient alignés.

Exercice 14 Des points qui définissent un plan

L'espace est rapporté au repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

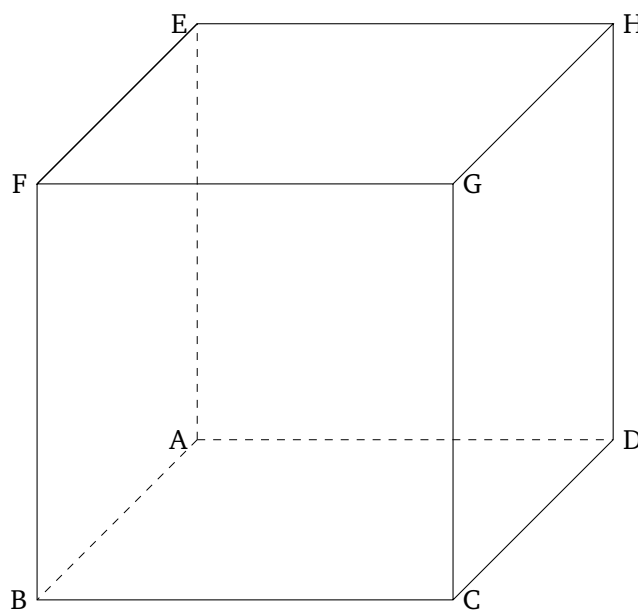
On considère les points

$$A(2 ; 3 ; -2) \quad , \quad B(1 ; 3 ; 1) \quad \text{et} \quad C(-1 ; 1 ; 0).$$

Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.

Exercice 15 Points alignés

Soit ABCDEFGH un cube.



L'espace est rapporté au repère $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

On note I le milieu du segment $[AB]$.

Soit J le point défini par

$$\vec{AJ} = \frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AE}.$$

Démontrer que les points I, J et G sont alignés.

Exercice 16 Points coplanaires

L'espace est rapporté au repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points

$$A(1 ; 2 ; 1) \quad , \quad B(-1 ; -2 ; 3) \quad \text{et} \quad C(1 ; 2 ; 5).$$

Démontrer que les points O, A, B et C sont coplanaires.

Exercice 17 Changement de base

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace.

On définit les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ par

$$\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} \quad , \quad \vec{v} = -\vec{i} + \vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{w} = \vec{k}.$$

1. Justifier que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une base de l'espace.

2. Exprimer les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

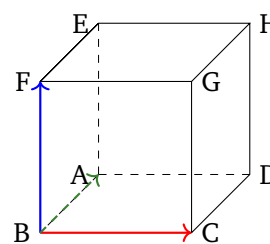
3. On considère le vecteur $\vec{l} = 4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{l}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Exercice 18 Points alignés

Soit ABCDEFGH un cube et soit K un point tel que :

$$\vec{BK} = \frac{1}{3}(\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BF}).$$

Prouver que les points B, K et H sont alignés.



Exercice 19 Normes de vecteurs

Dans un repère orthonormé, on considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$ où $x \in \mathbb{R}$.

Déterminer les éventuels valeurs de x tels que :

1. $\|\vec{u}\| = 3$.

2. $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

Exercice 20 Isobarycentre d'un tétraèdre

Soit ABCD un tétraèdre.

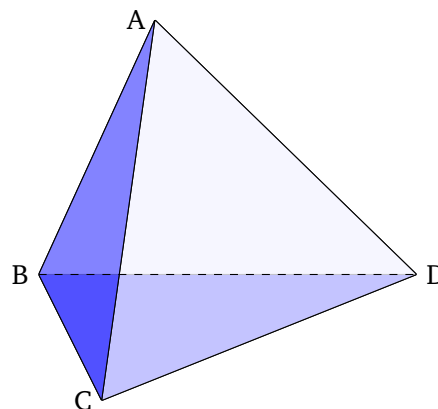
Soient I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [AD].

On note O le milieu du segment [IK]

L'objectif de cet exercice est de prouver l'égalité suivante :

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}.$$

On dit que le point O est l'isobarycentre du tétraèdre ABCD.



1. Montrer les égalités suivantes.

$$\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AC} \quad \text{et} \quad \vec{LK} = \frac{1}{2}\vec{AC}.$$

2. En déduire la nature du quadrilatère IJKL.

3. Conclure.

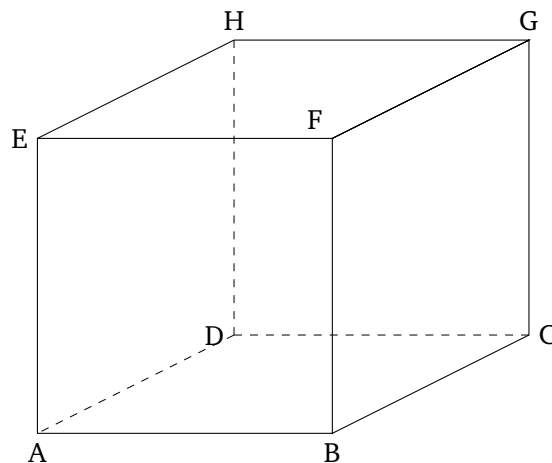
Exercice 21 Repère de l'espace

On considère le cube ABCDEFGH ci-dessous.

I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments [AB], [AC], [AD] et [ED].

On considère le point M tel que

$$\vec{BM} = 2\vec{IJ} + 5\vec{KL}.$$



1. Justifier que $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère de l'espace.
2. Déterminer les coordonnées du point M dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

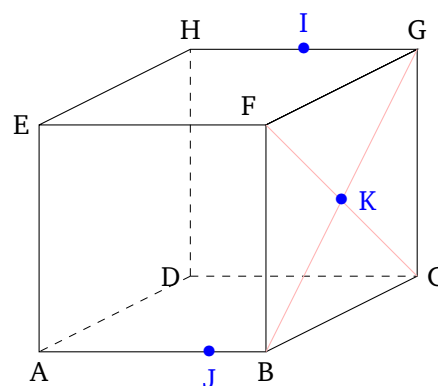
Exercice 22 Droites parallèles

On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous.

On définit les points I, J et K de la manière suivante :

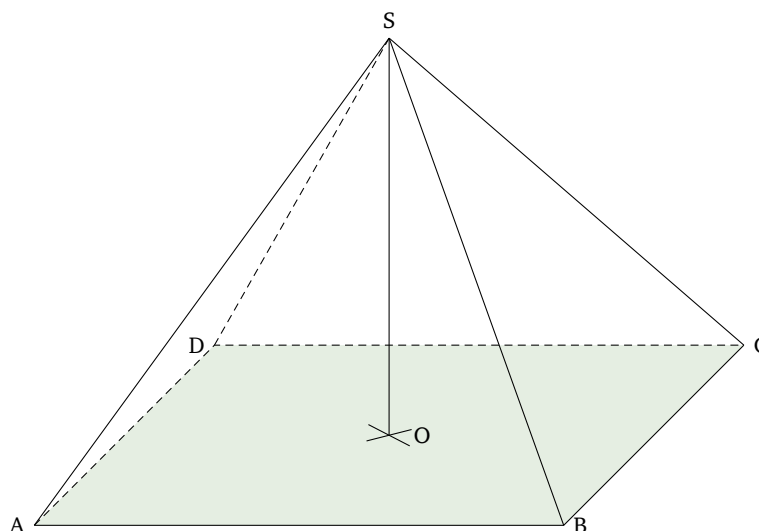
- I est le milieu du segment [HG];
- J vérifie $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$;
- K est le centre de la face BCGF.

1. Montrer que $\overrightarrow{KJ} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{AI}$.
2. En déduire que les droites (KJ) et (AI) sont parallèles.



Exercice 23 Pyramide à base carrée

On considère la pyramide régulière SABCD de sommet S constituée de la base carrée ABCD et de triangles équilatéraux représentée ci-dessous.



Le point O est le centre de la base ABCD avec $OB = 1$.

On rappelle que le segment $[SO]$ est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes ont la même longueur.

On munit l'espace du repère orthonormé $(O ; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS})$.

On définit le point K par la relation $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3} \overrightarrow{SD}$ et on note I le milieu du segment $[SO]$.

1. Déterminer les coordonnées du point K.
2. En déduire que les points B, I et K sont alignés.
3. On note L le point d'intersection de l'arête $[SA]$ avec le plan (BCI).
Déterminer les coordonnées du point L.
On pourra admettre que les droites (AD) et (KL) sont parallèles.