

Les objectifs du chapitre

Contenu

- La suite (u_n) tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $[A ; +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang. Cas des suites croissantes non majorées. Suite tendant vers $-\infty$
- La suite (u_n) converge vers le nombre réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang
- Limites et comparaison. Théorème des gendarmes et théorème de comparaison
- Opérations sur les limites
- Comportement d'une suite géométrique (q^n) où q est un nombre réel
- Théorème admis : toute suite croissante majorée (ou décroissante minorée) converge

Capacités attendues

- Établir la convergence d'une suite, ou sa divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$
- Raisonner par récurrence pour établir une propriété d'une suite
- Étudier des phénomènes d'évolution modélisables par une suite

Démonstrations exigibles

- Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$
- Limite de (q^n) , après démonstration par récurrence de l'inégalité de Bernoulli
- Divergence vers $+\infty$ d'une suite minorée par une suite divergeant vers $+\infty$
- Limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction exponentielle

Exemples d'algorithmes

- Recherche de seuils
- Recherche de valeurs approchées de π , e , $\sqrt{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\ln(2)$, ...

Approfondissements possibles

- Propriétés et utilisation des suites adjacentes
- Exemples de suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants
- Exemples d'application de la méthode de Newton. Étude de la convergence de la méthode de Héron

I Le cours

1. Définition d'une suite numérique

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{N}$ par $f(n) = 2n + 3$. On a alors

$$\begin{aligned} \blacktriangleright f(0) &= 2 \times 0 + 3 = 3 & \blacktriangleright f(1) &= 2 \times 1 + 3 = 5 & \blacktriangleright f(2) &= 2 \times 2 + 3 = 7. \end{aligned}$$

On ne peut cependant pas calculer $f(1,5)$ car la fonction f n'est définie que sur $\mathbb{N}$ et $1,5 \notin \mathbb{N}$.

Afin de **modéliser** une grandeur **discrète** (par exemple relever la température d'une pièce à chaque minute n), on introduit la suite des réels $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$ qui représentent les températures relevées à chaque instant.

On délaisse rapidement la notation fonctionnelle $f(n)$ pour adopter la notation indicielle u_n , introduite par le mathématicien français Joseph-Louis Lagrange (1736-1813). Ainsi, d'après l'exemple précédent, on a

$$\blacktriangleright u_0 = 3 \qquad \blacktriangleright u_1 = 5 \qquad \blacktriangleright u_2 = 7.$$

Lorsqu'il n'y a pas de risque d'ambiguïté, on écrit simplement (u_n) pour désigner la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

 u_n qui est un nombre réel, désigne le **terme général** de la suite (u_n) . À ne pas confondre avec la notation $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui désigne la **collection des nombres** $u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4 ; u_5 ; \dots$

Certaines suites ne sont définies que sur une partie de $\mathbb{N}$.

- $\blacktriangleright$ La suite de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ est définie sur $\mathbb{N}^*$. On la note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ou $(u_n)_{n \geq 1}$ ou encore $(u_n)_{n > 0}$.
- $\blacktriangleright$ On considère la suite de terme général $v_n = \sqrt{n-5}$. Le nombre $\sqrt{n-5}$ n'étant défini que pour les entiers n tels que $n \geq 5$, on dit que la suite de terme général v_n est définie **à partir du rang 5** et on la note $(v_n)_{n \geq 5}$.

Définition 1 : suite numérique

On appelle suite numérique toute **fonction** définie sur $\mathbb{N}$ (ou sur une partie de $\mathbb{N}$) et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Il existe principalement deux méthodes pour générer une suite.

- ❶ Les suites définies **explicitement** à l'aide d'une certaine fonction $f : u_n = f(n)$
 Par exemple la suite (u_n) définie par $u_n = 3n^2 + 7$.
 On a alors $u_0 = f(0) = 3 \times 0^2 + 7 = 7$; $u_1 = 3 \times 1^2 + 7 = 10$ et $u_2 = 3 \times 2^2 + 7 = 19$.
 Pour calculer u_{13} par exemple, il suffit de remplacer n par 13 dans le terme général de (u_n) , ce qui donne $u_{13} = 514$.
- ❷ Les suites définies **implicitement** par une relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$
 Par exemple la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n - 4$.
 On a alors $u_1 = 5 \times 2 - 4 = 6$; $u_2 = 5 \times 6 - 4 = 26$ et $u_3 = 5 \times 26 - 4 = 126$.
 Pour obtenir u_{13} , on doit d'abord calculer tous les termes précédents, ce qui est très fastidieux !

2. Sens de variation d'une suite

Une suite numérique est en particulier une fonction, il est donc naturel d'étudier ses variations.

Définition 2 : sens de variation d'une suite

- $\blacktriangleright$ Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **croissante** (resp. strictement croissante) lorsque $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (resp. $u_{n+1} > u_n$).
- $\blacktriangleright$ Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **décroissante** (resp. strictement décroissante) lorsque $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (resp. $u_{n+1} < u_n$).

 Une suite peut n'être ni croissante, ni décroissante. Par exemple la suite (-1^n) .

En pratique, pour déterminer le sens de variations d'une suite (u_n) , on peut :

-  **méthode 1** : étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$;
-  **méthode 2** : étudier les variations sur $[0 ; +\infty[$ de la fonction f si (u_n) est définie par $u_n = f(n)$;
-  **méthode 3** : comparer les nombres $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1, dans le cas où la suite étudiée est à termes strictement positifs.

Exemple

Étudions les variations de la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 7n + 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$
 Pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} - u_n = 7n + 3 > 0$. Il en résulte que (u_n) est strictement croissante.

Pour étudier les variations d'une suite dont les termes sont strictement positifs, il est dans certains cas plus simple de comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1. En effet on a la propriété suivante :

Propriété 1 : sens de variation d'une suite à termes strictement positifs

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à **termes strictement positifs**.

- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration

- Pour tout entier naturel n , on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.
 En multipliant les deux membres de cette inégalité par le nombre strictement positif u_n , l'ordre est conservé et on obtient $u_{n+1} \geq u_n$.
 Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on conclut que la suite (u_n) est croissante.
- De la même manière, en multipliant l'inégalité $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ par le nombre strictement positif u_n , l'ordre est conservé et on obtient $u_{n+1} \leq u_n$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, la suite (u_n) est décroissante.

 Si $u_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (suite à **termes strictement négatifs**), alors pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \quad \xrightarrow{\times u_n} \quad u_{n+1} \leq u_n : \text{l'ordre change et } (u_n) \text{ est décroissante.}$$

Méthode 1 : étude des variations d'une suite

Étudier les variations de la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{5^n}{e^n}$.

Corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5^{n+1}}{e^{n+1}} \times \frac{e^n}{5^n} = \frac{5}{e} > 1$. Par conséquent (u_n) est strictement croissante.

3. Le principe de récurrence

Une propriété $\mathcal{P}(n)$ qui dépend de l'entier naturel n peut être démontrée à l'aide du raisonnement par récurrence. Par exemple, on peut

- **prouver une égalité** : $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$;
- **prouver une inégalité** : $(1+a)^n \geq 1+na$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$) ;

- **obtenir une expression explicite d'une suite** : la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = (n+1)^2$.

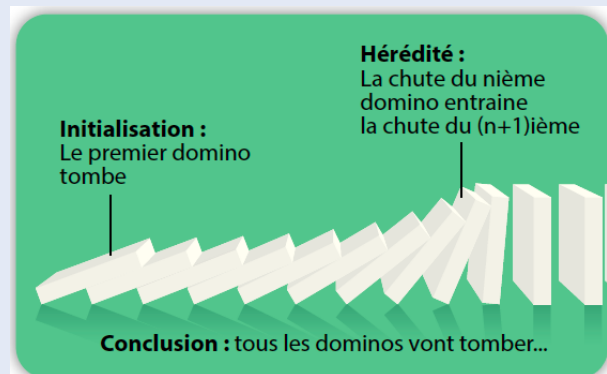
Propriété 2 : principe de récurrence

Si

- ❶ il existe un entier naturel n_0 tel que la propriété $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (**initialisation**) ;
- ❷ pour tout entier $n \geq n_0$: $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ (**hérédité**).

Alors pour tout entier $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Le raisonnement par récurrence s'apparente au principe des dominos, comme le montre le schéma ci-contre.



Méthode 2 : inégalité de Bernoulli

Soit a un réel **strictement positif**. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'inégalité $(1+a)^n \geq 1+na$.

Solution :

Soit a un nombre réel strictement positif **fixé**.

Raisonnons par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ l'inégalité : $(1+a)^n \geq 1+na$.

- **Initialisation** : pour $n = 0$, on a $(1+a)^0 = 1$ et $1+0 \times a = 1$. Donc $(1+a)^0 \geq 1+0 \times a$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : soit n un entier naturel fixé pour lequel on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire

$$(1+a)^n \geq 1+na \quad \text{hypothèse de récurrence}$$

Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est également vraie, à savoir $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$.

Par hypothèse de récurrence, on a $(1+a)^n \geq 1+na$.

En multipliant les deux membres de cette inégalité par le réel strictement positif $(1+a)$, on obtient

$$(1+a) \times (1+a)^n \geq (1+a) \times (1+na).$$

Ce qui donne en développant ensuite le membre de droite

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+na+a+\underbrace{na^2}_{\geq 0} \quad \text{ou encore} \quad (1+a)^{n+1} \geq 1+na+a.$$

Par conséquent $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$ et ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** : la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire à partir de ce rang. Par le principe de récurrence, on a prouvé que pour tout entier naturel n , $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

$$\text{Autrement dit, pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et pour tout } a > 0 \quad (1+a)^n \geq 1+na.$$

Remarque

l'initialisation est une étape fondamentale lors d'un raisonnement par récurrence. Ne pas la vérifier peut mener à des démonstrations fausses comme le montre le contre-exemple suivant.

Pour tout entier naturel n , on considère la propriété $\mathcal{P}(n)$: 5 divise l'entier $6^n + 1$.

- Cette propriété est **héréditaire** pour tout entier naturel n . En effet :
Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors il existe un entier k_n (on note k indice n pour indiquer la dépendance de k par rapport à n) tel que $6^n + 1 = 5k_n$.

$$\text{On a donc } 6^{n+1} + 1 = 6 \times 6^n + 1 = 6 \times (5k_n - 1) + 1 = 30k_n - 5 = 5 \left(\underbrace{6k_n - 1}_{=k_{n+1} \in \mathbb{Z}} \right) = 5k_{n+1}.$$

Ainsi 5 divise $6^{n+1} + 1$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est également vraie.

➤ Cependant $\mathcal{P}(0)$ n'est pas vraie car 5 ne divise pas 2.

On ne peut pas prouver que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour d'autres entiers n non nuls. D'ailleurs cette propriété n'est vraie pour aucun entier naturel n .

4. Suites convergentes

On considère la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par $u_n = \frac{1}{n}$. On a pour tout entier $n \geq 1$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0 \quad \text{car } n > 0 \text{ et a fortiori } n(n+1) > 0.$$

Il en résulte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} < u_n$. Ainsi la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante. Par ailleurs, les premiers termes de la suite (u_n) sont :

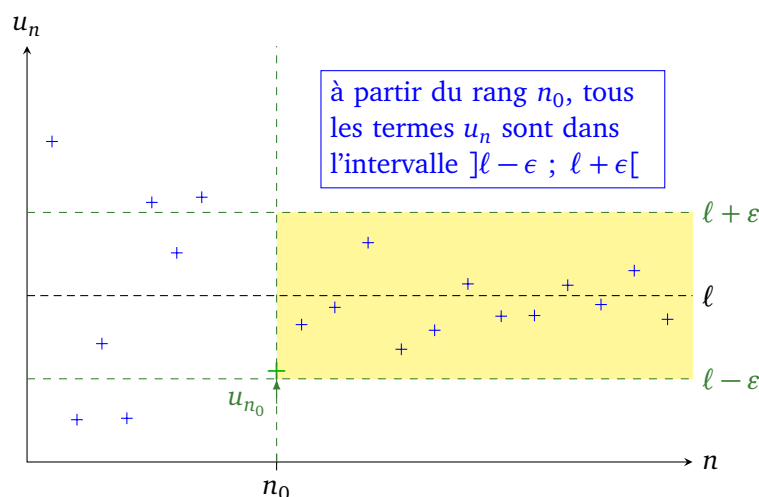
$$\begin{array}{llll} \text{➤ } u_1 = 1 & \text{➤ } u_2 = \frac{1}{2} = 0,5 & \text{➤ } u_3 = \frac{1}{3} \approx 0,333 & \text{➤ } u_4 = \frac{1}{4} = 0,25 \end{array}$$

On remarque qu'au fur et à mesure que n **devient grand**, les valeurs u_n **s'approchent de 0**. En effet, pour tout entier $n \geq 1$, $\frac{1}{n}$ ne peut prendre de valeurs négatives. De plus comme la suite (u_n) est décroissante, intuitivement, les valeurs u_n ne peuvent pas "descendre" en-dessous de 0. On dit que la suite (u_n) **converge** (ou tend) vers 0.

Définition 3 : limite finie d'une suite

On dit qu'une suite (u_n) admet pour limite un nombre réel ℓ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite (u_n) **à partir d'un certain indice** n_0 .

Dans ce cas, (u_n) est dite suite convergente de limite ℓ et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.



➤ Le schéma ci-dessus montre "l'accumulation" des termes u_n autour du réel ℓ à partir d'un certain indice n_0 .

➤ **Limites de référence :** les suites $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \geq 1}$, $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \geq 1}$, $\left(\frac{1}{n^3}\right)_{n \geq 1}$ et $(e^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ ont pour limite 0.

➤ **Définition de la limite avec un epsilon :** (Cauchy 1821, Cours d'Analyse de l'École Polytechnique)

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, on ait : $|u_n - \ell| < \epsilon$.

Interprétation : quitte à prendre n assez grand, u_n est aussi proche de ℓ que voulu.

- ⚠ La convergence d'une suite est une propriété au voisinage de l'infini qui ne dépend pas des premiers termes. Ainsi si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $(u_n)_{n \geq 10^{999}}$ converge aussi vers ℓ .

Propriété 3 : unicité de la limite (admise)

Lorsqu'elle existe, la limite ℓ d'une suite (u_n) est **unique**.

5. Suites divergentes

Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**. Dans ce cas, la limite peut être $+\infty$ ou $-\infty$ ou aucune limite.

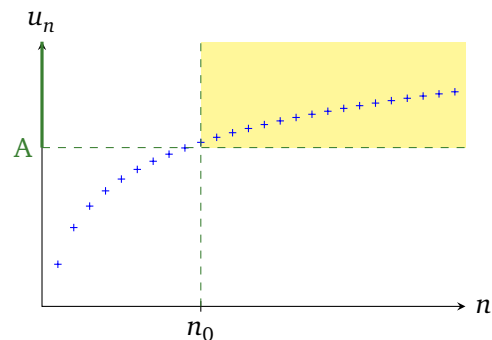
On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 10n + 5$.

- Il semble que le terme général u_n est aussi grand que l'on veut lorsque n est suffisamment grand.
- Par exemple $u_n > 1\,000\,000$ pour tout entier $n \geq 100\,000$.

Définition 4 : limite infinie d'une suite

On dit qu'une suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert de la forme $]A ; +\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain indice n_0 et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

- Le schéma ci-contre montre qu'à partir d'un certain indice n_0 , les termes u_n dépassent tout nombre A , aussi grand soit-il.
- Ainsi, en prenant n suffisamment grand, on peut rendre u_n aussi grand que l'on veut.
- De manière similaire, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ signifie que tout intervalle ouvert de la forme $] -\infty ; A[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain indice n_0 .



Limites de référence : les suites $(n)_{n \geq 0}$, $(\sqrt{n})_{n \geq 0}$, $(n^2)_{n \geq 0}$, $(n^3)_{n \geq 0}$ et $(e^n)_{n \geq 0}$ ont pour limite $+\infty$.

Remarque

Il existe des suites divergentes qui n'admettent aucune limite !

Par exemple, les suites de termes généraux $(-1)^n$, $\sin n$ et $\cos n$ n'ont pas de limite.

Si une suite (u_n) est **croissante**, alors on a l'alternative suivante :

- soit (u_n) est majorée et converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$;
- soit (u_n) n'est pas majorée et diverge vers $+\infty$.

Ce deuxième point fait l'objet de la propriété suivante.

Propriété 4 : divergence de suites monotones

- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite **croissante et non majorée**, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite **décroissante et non minorée**, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration (exigible)

Il s'agit de prouver, sous les hypothèses du théorème, que

pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un rang n_0 à partir duquel $u_n > A$.

(★)

Soit A un nombre réel.

- La suite (u_n) n'étant pas majorée, il existe un terme de la suite (u_n) strictement supérieur à A. Notons-le u_{n_0} . Ainsi,

$$\text{il existe un entier } n_0 \text{ pour lequel } u_{n_0} > A. \quad (①)$$

- Par ailleurs la suite (u_n) est croissante, donc

$$\text{pour tout entier } n \geq n_0, \text{ on a } u_n \geq u_{n_0}. \quad (②)$$

Les points (①) et (②) montrent que pour un réel A donné, il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, on ait $u_n > A$. Le réel A étant quelconque, on conclut que

quel que soit $A \in \mathbb{R}$, il existe un rang n_0 à partir duquel $u_n > A$.

Il en résulte que l'assertion (★) est vraie.

Par conséquent

toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.

On démontre de manière analogue le deuxième point.

6. Opérations sur les limites

Le calcul de la limite d'une suite est simplifiée par la compatibilité avec les opérations arithmétiques élémentaires. Il existe cependant des **formes indéterminées** (notées FI dans la suite) qui font obstacle à cette technique. Une FI veut tout simplement dire qu'il n'existe aucune règle générale pour traiter ce cas là.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. ℓ et ℓ' désignent deux nombres réels.

Limite d'une somme

(u_n) a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
(v_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$(u_n + v_n)$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Limite d'un produit

(u_n) a pour limite	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	0
(v_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	∞
$(u_n v_n)$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Limite d'un quotient (cas $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \neq 0$)

(u_n) a pour limite	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
(v_n) a pour limite	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\pm\infty$
$\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Limite d'un quotient (cas $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$)

(u_n) a pour limite	$\ell \neq 0$ ou ∞	0
(v_n) a pour limite	0 en gardant un signe constant à partir d'un certain indice n_0	0
$\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	∞	FI

On a vu apparaître dans les tableaux précédents des formes indéterminées : " $\infty - \infty$ ", " $\frac{\infty}{\infty}$ ", " $\frac{0}{0}$ " et " $0 \times \infty$ ". Il existe cependant des méthodes pour lever certaines indéterminations.

Méthode 3 : déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $\frac{3n^2 + 4n - 2}{4n^2 + 5n + 9}$

Par somme et produit des limites, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3n^2 + 4n - 2) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (4n^2 + 5n + 9) = +\infty$.

Il s'agit donc d'une forme indéterminée (du type $\frac{\infty}{\infty}$). Pour lever cette indétermination, on factorise chacune des deux expressions polynomiales par son terme dominant ($3n^2$ ou n^2 pour le numérateur et n^2 ou $4n^2$ pour le dénominateur). Ainsi pour tout entier naturel $n \neq 0$

$$u_n = \frac{3n^2 + 4n - 2}{4n^2 + 5n + 9} = \frac{n^2 \left(3 + \frac{4}{n} - \frac{2}{n^2}\right)}{n^2 \left(4 + \frac{5}{n} + \frac{9}{n^2}\right)} = \frac{3 + \frac{4}{n} - \frac{2}{n^2}}{4 + \frac{5}{n} + \frac{9}{n^2}}.$$

$$\text{Or, } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{4}{n} - \frac{2}{n^2}\right) = 3 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(4 + \frac{5}{n} + \frac{9}{n^2}\right) = 4 \end{cases} \quad \text{donc par quotient des limites} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3}{4}.$$

7. Comparaison et encadrement de limites - convergence des suites monotones

On s'intéresse à présent à des méthodes "indirectes" pour étudier la convergence d'une suite donnée.

Propriété 5 : passage à la limite dans les inégalités

Soient (u_n) et (v_n) deux suites **convergentes**.

Si $u_n \leq v_n$ pour tout entier n supérieur à un certain rang n_0 , alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

 Si $u_n < v_n$ pour tout $n \geq n_0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$. Il ne faut pas espérer obtenir $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n < \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$. Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < \frac{1}{n}$. Mais en passant à la limite on obtient $0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

On retiendra que dans un passage à la limite, les inégalités strictes deviennent larges.

Propriété 6 : théorème de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang n_0 .

- ❶ Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
- ❷ Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration (exigible)

On démontre seulement le point ❶. Soit A un nombre réel.

- Par hypothèse, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $v_n \geq u_n$.
- Par ailleurs $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_1$, $u_n > A$.

On pose $N = \max(n_0 ; n_1)$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$, $v_n \geq u_n > A$.

Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$, $v_n > A$. Autrement dit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Méthode 4 : déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + 1}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + 1 > n^2$, donc $\sqrt{n^2 + 1} > \sqrt{n^2} = n$ par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$.
Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, donc par le théorème de comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + 1} = +\infty$.

Bien que la suite de terme général $(-1)^n$ n'admette pas de limite (ses valeurs alternent entre -1 et 1 en fonction de la parité de n), la suite de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ est convergente. Le théorème suivant permet de le démontrer.

Propriété 7 : théorème des gendarmes

Soit ℓ un nombre réel. On considère trois suites numériques (u_n) , (v_n) et (w_n) telles que :

- Pour tout entier n supérieur à un certain entier naturel n_0 , on ait $v_n \leq u_n \leq w_n$;
- Les suites (v_n) et (w_n) convergent vers **la même limite** ℓ .

Alors la suite (u_n) est convergente et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

 Le théorème des gendarmes est avant tout un **théorème d'existence** : il permet de prouver que la limite d'une suite encadrée par deux suites convergentes de limite commune ℓ admet une limite finie égale à ℓ aussi.

Méthode 5 : déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

Pour tout entier naturel n , on a $-1 \leq (-1)^n \leq 1$.

Donc pour tout entier naturel $n \neq 0$, on obtient $\frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc par le théorème des gendarmes on conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Définition 5 : suite majorée, suite minorée, suite bornée

Soit (u_n) une suite numérique. On dit que :

- (u_n) est **majorée** s'il existe un nombre réel M tel que pour tout entier naturel n , $u_n \leq M$.
Le réel M est un **majorant** de la suite (u_n) ;
- (u_n) est **minorée** s'il existe un nombre réel m tel que pour tout entier naturel n , $m \leq u_n$.
Le réel m est un **minorant** de la suite (u_n) ;
- (u_n) est **bornée** si elle est à la fois minorée et majorée.

Exemple

La suite de terme général $u_n = 3 + 2 \cos n$ est majorée par 5 et minorée par 1.

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a, $-1 \leq \cos n \leq 1$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq 3 + 2 \cos n \leq 5$.

Propriété 8 : théorème de convergence des suites monotones (admis)

➤ Une suite croissante et majorée converge.

➤ Une suite décroissante et minorée converge.

 Le théorème de convergence des suites monotones est un **théorème d'existence**. Il ne fournit cependant pas la valeur de la limite.

Méthode 6 : un petit exercice à faire

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

❶ Montrer que $0 \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

❷ Montrer que $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Conclure.

8. Limite d'une suite géométrique**Propriété 9 : limite d'une suite géométrique**

Soit q un nombre réel.

❶ Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

❸ Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

❷ Si $q = 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$.

❹ Si $q \leq -1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$ n'existe pas.

Démonstration du point ❶ (exigible)

On suppose que $q > 1$. Il existe alors un réel a strictement positif tel que $q = 1 + a$.

L'inégalité de Bernoulli (voir la méthode 2) permet d'écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q^n = (1 + a)^n \geq 1 + na$.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + na) = +\infty$ car $a > 0$, donc par le théorème de comparaison on conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

Méthode 7 : déterminer (si elle existe) chacune des limites suivantes

❶ $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n$

❷ $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n}$

❸ $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2)^n$

Solution :

❶ $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$ car $e > 1$.

❷ $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$ car $e^{-n} = (e^{-1})^n$ et $-1 < e^{-1} < 1$.

❸ $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2)^n$ n'a pas de limite car $-2 \leq -1$.

9. Les erreurs à éviter

➤ Lorsqu'on écrit l'hypothèse de récurrence, il faut bien considérer $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un entier n , et pas pour tout entier n ; sinon on admet la propriété qu'il faut démontrer !

➤ Majorer une suite (u_n) par un réel qui dépend de n ne veut pas dire que la suite (u_n) est majorée !

➤ Dans un passage à la limite, les inégalités strictes deviennent **larges**.

Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{n} > 0$ mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

➤ Une suite (u_n) croissante et majorée par un réel M converge, mais pas forcément vers M .

On peut seulement écrire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq M$.

➤ Pour une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **définie par récurrence** par une formule du type $u_{n+1} = f(u_n)$,

l'implication f **croissante** $\implies (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **est croissante** n'est pas vraie en général.

Pour s'en convaincre, traiter l'exercice 39.

II Les exercices

1. Généralités

Exercice 1 Calculs de termes d'une suite

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 3n + 2$.

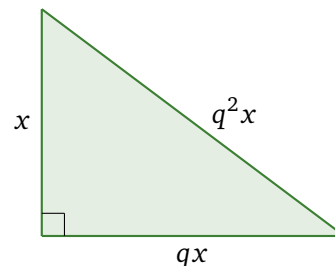
1. Déterminer le terme de rang 4 de la suite (u_n) .
2. Calculer le sixième terme de la suite (u_n) .

Exercice 2 Termes consécutifs d'une suite géométrique

On considère un triangle rectangle comme indiqué sur la figure ci-contre.

Les mesures de ses côtés peuvent-elles être trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q ?

Autrement dit, peut-on avoir un triangle rectangle de côtés respectifs x , qx et q^2x où x est un nombre donné strictement positif ?



Exercice 3 Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Montrer les égalités suivantes.

1. $1 + 2 + 4 + \dots + 256 + 512 = 1023$
2. $1 + \sqrt{2} + 2 + \dots + 16\sqrt{2} = 31(\sqrt{2} + 1)$

Exercice 4 Sens de variation

Étudier les variations de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

1. $u_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$
2. $u_n = \frac{n+1}{n-1}, n$ entier tel que $n \geq 2$
3. $u_n = \sqrt{n-2}, n$ entier tel que $n \geq 2$
4. $u_n = \frac{1}{n(n+1)}, n \in \mathbb{N}^*$
5. $u_n = n^2 - 3n + 4, n \in \mathbb{N}^*$
6. $u_n = \frac{7^n}{8^n}, n \in \mathbb{N}$
7. $u_n = 3n^2 + n + 1, n \in \mathbb{N}$
8. $u_n = 2n - (-1)^n, n \in \mathbb{N}$
9. $u_n = \frac{2^{3n}}{3^{2n}}, n \in \mathbb{N}$
10. $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n - n^2, n \in \mathbb{N}$
11. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n - \frac{2}{n+1}, n \in \mathbb{N}$
12. $u_0 = 200$ et $u_{n+1} = 0,9u_n, n \in \mathbb{N}$

2. Le principe de récurrence

Exercice 5 Quelques résultats classiques

Montrer par récurrence les relations suivantes, valables pour tout entier $n \geq 1$.

1. $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$
4. $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$
5. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$
6. $2^n \geq 1 + n$

Exercice 6 Monotonie d'une suite définie par récurrence

Montrer que la suite (u_n) définie par, $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, est strictement croissante. On pourra admettre que la suite (u_n) est à termes strictement positifs.

Exercice 7 Suite minorée

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par, $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, est minorée par 3.

Exercice 8 Conjecturer l'expression d'une suite définie par récurrence

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Compléter le tableau ci-contre, puis conjecturer une expression de u_n en fonction de l'entier n .
2. Prouver cette conjecture.

n	0	1	2	3	4	5
u_n						

Exercice 9 Obtenir une expression explicite 1

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{n}{n+1}$.

Exercice 10 Obtenir une expression explicite 2

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{5^{n+2} + 3}{2}$.

Exercice 11 Un multiple de 3

Démontrer que pour tout entier naturel n , $4^n + 5$ est un multiple de 3.

Exercice 12 Fraction continue

On pose

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = \frac{-1}{2+1} \quad ; \quad u_2 = \frac{-1}{2 + \frac{-1}{2+1}}.$$

1. En partant des trois premiers termes ci-dessus, définir la suite (u_n) par récurrence.
2. Montrer que pour tout entier naturel n , $2 + u_n > 0$.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n + 1)^2}{2 + u_n}$.
4. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

Exercice 13 Une suite homographique

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{4u_n + 1} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3 . En déduire que (u_n) n'est pas arithmétique.

2. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n > \frac{1}{2}$.
3. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}}$.
- (a) Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.
- (b) En déduire une expression de u_n en fonction de l'entier naturel n .

3. Étude de la convergence de suites

Exercice 14 Opérations sur les limites

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ dans chacun des cas suivants.

1. $u_n = n^3 + \frac{1}{n^2}$

2. $u_n = n^{17} + n^2 + n + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^{17}}$

3. $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

4. $u_n = 5n\sqrt{n}$

5. $u_n = (3n - \sqrt{5})\left(\frac{1}{n} - e\right)$

6. $u_n = \frac{2\pi}{n^2 + 1}$

7. $u_n = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{n^2 + 5}$

8. $u_n = \frac{5 - \frac{1}{n^3}}{\frac{2}{n^2} + 7}$

9. $u_n = \frac{-2}{1 - \frac{1}{n^2}}$

10. $u_n = 3n^2 - \frac{4}{2n+1}$

11. $u_n = \frac{-5n^3}{7e + \sqrt{101}}$

12. $u_n = \left(\frac{1}{n} - 2\right)n^3$

13. $u_n = \frac{\frac{2}{n} - 1}{\frac{1}{n^2}}$

14. $u_n = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right)}{n^3 + 5}$

Exercice 15 Quelques formes indéterminées

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ dans chacun des cas suivants.

1. $u_n = n - n^2$

2. $u_n = 2n^2 - 5n + \sqrt{7}$

3. $u_n = n^3\sqrt{n} - \sqrt{n}$

4. $u_n = \frac{n+1}{n}$

5. $u_n = \frac{3n^2 - 5n + 2}{6n^2 + 5n + 1}$

6. $u_n = \frac{n^2 - 1}{n + 1}$

7. $u_n = \frac{3\sqrt{n}}{2n + 1}$

8. $u_n = 5n\sqrt{n} - 2n^3$

9. $u_n = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2$

10. $u_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$

11. $u_n = \frac{n - \sqrt{n^2 + 1}}{n + \sqrt{n^2 + 1}}$

Exercice 16 Questions théoriques

Dans chacun des cas suivants, trouver deux suites (u_n) et (v_n) divergentes telles que :

1. La somme $(u_n + v_n)$ est une suite convergente.
2. Le produit $(u_n v_n)$ est une suite convergente.

Exercice 17 Comparaison de limites

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ de terme général

$$u_n = \frac{n^2 + 5}{\sqrt{n} - 1}.$$

1. Justifier que pour tout entier $n \geq 2$, $u_n \geq n\sqrt{n}$.
2. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 18 Limite d'une suite définie par récurrence

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier les variations de la suite (u_n) .
2. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n > n^2$.
3. En déduire la limite de (u_n) .

Exercice 19 Encadrement de limites

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ dans chacun des cas suivants.

1. $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

5. $u_n = \frac{n + \cos n}{n - \sin n}$

8. $u_n = \frac{2 \sin\left(\frac{(-2)^n}{n}\right)}{n^3 + \sqrt{5}}$

2. $u_n = \frac{n - (-1)^n}{n}$

6. $u_n = \frac{4n^2 - \sin n}{\cos n + 6n^2}$

9. $u_n = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right)}{n^4 + 7}$

3. $u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{1 + n + n^2}$

4. $u_n = \frac{\sin n}{n}$

7. $u_n = \frac{\cos(n\pi)}{n^2 + 1}$

10. $u_n = 5n^2 + \frac{\sin n}{n^2 + 7}$

Exercice 20 Suites définies par radicaux

1. On considère la suite de terme général $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq u_n \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$
 - (b) En déduire la limite de (u_n) .
2. Appliquer la méthode précédente pour déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 3} - n)$.

Exercice 21 QCM

Pour chacune des questions ci-dessous, déterminer la ou les bonnes réponses.

Question 1 :

On considère trois suites réelles (u_n) , (v_n) et (w_n) .

On sait que, pour tout entier naturel n , on a $u_n \leq v_n \leq w_n$. De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 3$.

On peut alors affirmer que :

- | | |
|---|-----------------------------|
| a. la suite (v_n) converge | c. $1 \leq v_0 \leq 3$ |
| b. si (u_n) est croissante, alors (v_n) est minorée par u_0 | d. la suite (v_n) diverge |

Question 2 :

On considère une suite (u_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{n}$. On peut alors affirmer que :

- | | |
|------------------------------|---|
| a. la suite (u_n) diverge | c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ |
| b. la suite (u_n) converge | d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ |

Question 3 :

On considère (u_n) une suite réelle telle que pour tout entier naturel n , $n < u_n < n + 1$. On peut affirmer que :

- | | |
|---|---------------------------------------|
| a. il existe un entier naturel N tel que $u_N \in \mathbb{Z}$ | c. la suite (u_n) est convergente |
| b. la suite (u_n) est croissante | d. La suite (u_n) n'a pas de limite |

Exercice 22 Limites de suites géométriques

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ dans chacun des cas suivants.

1. $u_n = \frac{(-2)^n}{3^n}$

4. $u_n = 3^n - 2^n$

7. $u_n = \frac{1+2^n}{3+5^n}$

10. $u_n = \frac{7^{-n}}{e^n}$

2. $u_n = \frac{7^n}{11^{n+1}}$

5. $u_n = \frac{1-3^n}{1+2^n}$

8. $u_n = \frac{1-2^n}{5^n}$

11. $u_n = \frac{4^n - 3^n}{4^n + 3^n}$

3. $u_n = e^{-n+3}$

6. $u_n = \frac{\left(\frac{21}{5}\right)^n}{\left(\frac{7}{9}\right)^n}$

9. $u_n = 3 \times \left(\frac{-1}{3}\right)^n$

12. $u_n = 2^{n+1} - 2^n$

Exercice 23 Limite d'une suite définie par récurrence 1

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 5 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Étudier les variations de la suite (u_n) .
2. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n > n^2$.
3. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 24 Limite d'une suite définie par récurrence 2

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. Montrer que pour tout entier naturel non nul n , on a $\begin{cases} u_1 - u_0 = u_0^2 + 1 \\ u_2 - u_1 = u_1^2 + 1 \\ \vdots = \vdots \\ u_{n-1} - u_{n-2} = u_{n-2}^2 + 1 \\ u_n - u_{n-1} = u_{n-1}^2 + 1 \end{cases}$
3. En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n \geq n + 1$.
4. Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$?

Exercice 25 Limite d'une suite définie par récurrence 3

On définit la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ par $\begin{cases} u_2 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3} \text{ pour tout entier } n \geq 2 \end{cases}$

1. Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = \frac{2^n + 2}{2^n - 2}$.
2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 26 Suite arithmético-géométrique

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. On pose pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 3$. Prouver que la suite (v_n) est géométrique.

2. Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n .
3. En déduire une expression de u_n en fonction de l'entier naturel n .
4. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Exercice 27 Utilisation de la définition d'une limite

Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = \frac{n-1}{n+1}$.

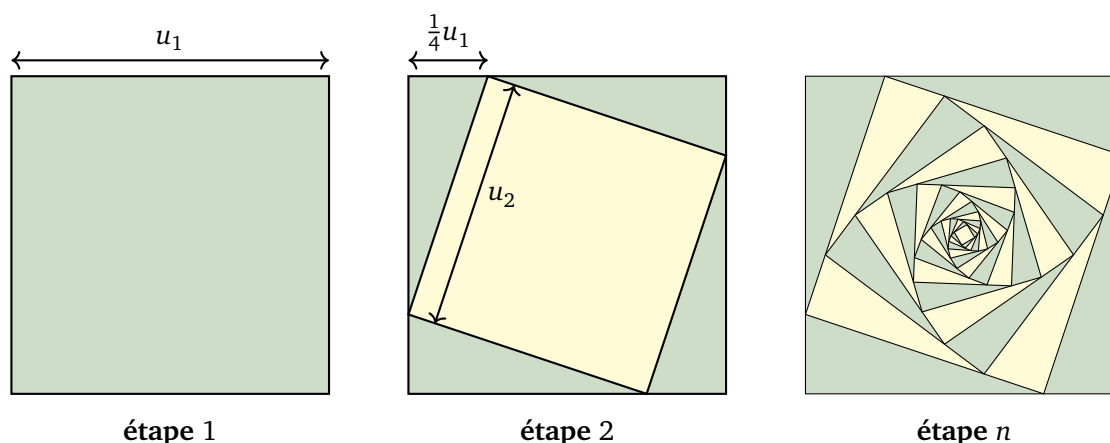
1. Montrer, par opérations sur les limites, que la suite (u_n) est convergente de limite 1.
2. Même question en utilisant uniquement la définition d'une limite finie d'une suite. Pour cela, considérer l'intervalle ouvert $I =]1 - \epsilon ; 1 + \epsilon[$ centré en 1 avec $\epsilon > 0$ et trouver un indice n_0 à partir duquel $u_n \in I$.

4. Motifs géométriques et modélisation

Exercice 28 Une suite de carrés

On considère une suite de carrés construits de la manière suivante :

- à l'étape 1, on construit un carré de côté $u_1 = c$ où c est un réel strictement positif ;
- à l'étape 2, on construit un carré de côté u_2 comme indiqué ci-dessous ;
- à l'étape n , on construit un carré de côté u_n comme indiqué ci-dessous.



1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est géométrique de raison $\frac{\sqrt{10}}{4}$.
2. Exprimer u_n en fonction de l'entier naturel non nul n .
3. On note $\mathcal{A}_n$ l'aire du carré de côté u_n .
 - (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$

$$\mathcal{A}_n = \frac{8c^2}{5} \times \left(\frac{5}{8}\right)^n.$$
 - (b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n$.
4. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $S_n = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \dots + \mathcal{A}_{n-1} + \mathcal{A}_n$.
 - (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$

$$S_n = \frac{8}{3}c^2 \left[1 - \left(\frac{5}{8}\right)^n \right].$$

- (b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Exercice 29**Loi de refroidissement de Newton**

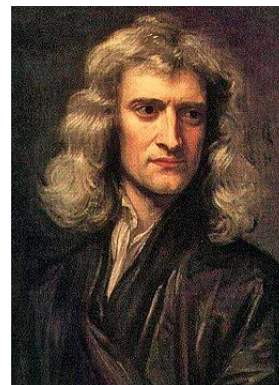
La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.

Une tasse de café est servie à une température initiale de $80\text{ }^{\circ}\text{C}$ dans un milieu dont la température est $10\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Pour tout entier naturel n , on note T_n la température du café à l'instant n , avec T_n exprimée en degré Celsius et n en minute. On a ainsi $T_0 = 80$.

On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques n et $n + 1$ par l'égalité :

$$T_{n+1} - T_n = -0,2(T_n - 10)$$



Isaac Newton
1642-1727

1. D'après le contexte, peut-on conjecturer le sens de variations de la suite (T_n) ?
2. Montrer que pour tout entier naturel n : $T_{n+1} = 0,8T_n + 2$.
3. On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = T_n - 10$.
 - (a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0 .
 - (b) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $T_n = 70 \times 0,8^n + 10$.
 - (c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$ et interpréter le résultat.
4. On considère l'algorithme en pseudo-code ci-dessous.

Tant que $T \geq 40$
 $T \leftarrow 0,8T + 2$
 $n \leftarrow n + 1$
 Fin Tant que

- (a) Au début, on affecte la valeur 80 à la variable T et la valeur 0 à la variable n .
 Quelle valeur numérique contient la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme?
- (b) Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Exercice 30**Probabilités conditionnelles et suites**

Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide.

On suppose que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant.

Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

- à l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est 0,9 ;
- si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,95 ;
- si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,2.

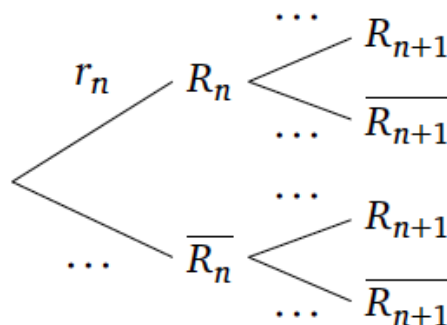
On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'évènement "le client rapporte la bouteille de son panier de la n -ième semaine".

1. (a) Modéliser la situation étudiée pour les deux premières semaines à l'aide d'un arbre pondéré qui fera intervenir les événements R_1 et R_2 .
 (b) Déterminer la probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine.

- (c) Montrer que la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la deuxième semaine est égale à 0,875.
- (d) Sachant que le client a rapporté la bouteille de son panier de la deuxième semaine, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas rapporté la bouteille de son panier de la première semaine ?
On arrondira le résultat à 10^{-3} .

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note r_n la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la n -ième semaine. On a alors $r_n = P(R_n)$.

- (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré (aucune justification n'est attendue).



- (b) Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $r_{n+1} = 0,75r_n + 0,2$.

- (c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8.$$

- (d) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n$.

Interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

Exercice 31 Placement à intérêts composés

Une personne décide d'ouvrir un compte épargne le premier janvier 2014 et d'y placer 2000 euros.

Le placement à intérêts composés est au taux annuel de 3 %. Elle verse 150 euros sur ce compte tous les 1^{ers} janvier suivants.

Pour tout entier naturel n , on note u_n le montant présent sur ce compte au premier janvier de l'année 2014 + n après le versement de 150 euros. On a $u_0 = 2000$.

Dans tout l'exercice les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

- Calculer les termes u_1 et u_2 de la suite (u_n) .
- Justifier que pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = 1,03u_n + 150$.
- Pour tout entier n , on pose $v_n = u_n + 5000$.
Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,03.
- Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n et en déduire que pour tout n , on a $u_n = 7000 \times 1,03^n - 5000$.
- On considère le programme ci-dessous écrit en  python.

```
def fonction(A):
    n=0
    u=2000
    while u<A:
        u=1.03*u+150
        n=n+1
    return n
```

- (a) Que renvoie `fonction(5000)` ?

- (b) Interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

Exercice 32 Une somme télescopique

Partie A : utilisation du symbole $\sum$

1. Soit n un entier tel que $n \geq 1$. Écrire les sommes suivantes sans l'utilisation du symbole $\sum$.

(a) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

(b) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n}$

2. Soit n un entier tel que $n \geq 1$. Écrire les sommes suivantes à l'aide du symbole $\sum$.

(a) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2}$

(b) $\frac{1}{1+n} + \frac{1}{\sqrt{2}+n} + \frac{1}{\sqrt{3}+n} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}+n}$

Partie B : une somme télescopique

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

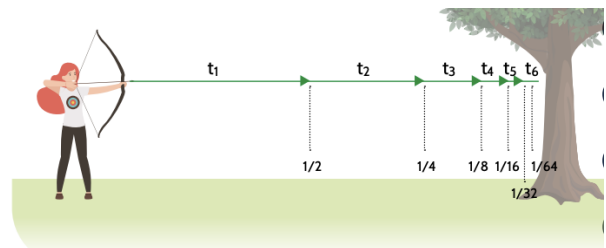
- Calculer S_1 , S_2 et S_3 .
- Montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante.
- Établir que pour tout entier $k \geq 1$,

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

4. En déduire une expression simple de S_n . Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$?

Exercice 33 Paradoxe de Zénon

Tirer une flèche contre un arbre. Avant d'atteindre l'arbre, la flèche devra parcourir la moitié de la distance, puis la moitié de la moitié qui reste, etc. jusqu'à l'infini. Puisqu'il y a une infinité de points à atteindre, il faut une infinité d'instants pour les parcourir, donc **la flèche n'atteindra jamais l'arbre**.



On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$.

- Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
- En déduire la limite de (u_n) .

5. Algorithmique

Exercice 34 L'effet papillon

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = 4u_n - 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- Prouver que cette suite est constante.
- On considère le programme en  python qui suit pour représenter la suite (u_n) .



```
def u(n):
    u=1/3
    for k in range(n):
        u= .....
    return u
```

AIDE

range(n) permet de parcourir les entiers de 0 à $n-1$.
Ainsi **list(range(5))** renvoie la liste :
[0, 1, 2, 3, 4].

(a) Compléter le script.

(b) Que renvoie $u(0)$? $u(1)$? $u(5)$? $u(40)$?

Exercice 35 Fonction seuil

Un individu place 2 800 € sur son livret d'épargne à un taux de 1,7 %.

1. Donner la forme explicite de la suite (u_n) qui modélise cette situation, puis compléter le programme écrit en  ci-dessous.

```
def u(...):
    return .....
```

2. On souhaite savoir au bout de combien d'années il disposera d'une somme supérieure à m €. Pour ce faire, on considère le script suivant.

```
def seuil(m):
    n=0
    while u(n)<m:
        n=n+1
    return n
```

(a) Que renvoie **seuil(3000)** ?

(b) Interpréter ce résultat.

Exercice 36 Développement décimal périodique

On note d le réel $\frac{41}{333}$.

1. Calculer d à 10^{-9} près.
2. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 0,123$ et $u_{n+1} = 10^{-3}u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Calculer $u_0 + u_1 + u_2$.(b) Déterminer la nature de la suite (u_n) .

3. On considère le programme en  qui suit pour représenter la suite (u_n) .

```
def u(n):
    u=0.123
    for k in range(n):
        u= .....
    return u
```

AIDE

range(n) permet de parcourir les entiers de 0 à $n-1$.
Ainsi **list(range(5))** renvoie la liste :
[0, 1, 2, 3, 4].

(a) Compléter le script.

(b) Que renvoie $u(1)$? $u(2)$?

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $S_n = d[1 - 10^{-3} \times (10^{-3})^n]$.
(b) En déduire la limite de (S_n) .

(c) En utilisant le fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, proposer une nouvelle écriture de d .

5. On considère le programme en  python qui suit pour représenter la suite (S_n) .

```
def S(n):
    S=0
    for k in range(n):
        S= .....
    return S
```

(a) Compléter le script.

(b) Que renvoie $S(100)$? $S(1000)$?

6. Exercices type BAC

Exercice 37 Étude d'une suite homographique

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{2u_n + 3} \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. (a) Calculer u_1 et u_2 .

(b) Montrer que pour tout entier naturel n , on a $u_n > 1$.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n = \frac{-2(u_n - 1)(u_n + 1)}{2u_n + 3}$.

(d) En déduire le sens de variation de (u_n) .

2. On définit la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ par $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

(a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique, puis exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n .

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1 + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n}$. Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$?

Exercice 38 Incontournable 1

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \frac{6u_n + 2}{u_n + 5} \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Calculer u_1 . On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible.

2. Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{6x + 2}{x + 5}$.

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

(b) En déduire que pour tout réel $x > 2$, on a $f(x) > 2$.

(c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $u_n > 2$.

3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{u_n + 5}$.

(b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

(c) Que peut-on dire de la convergence de (u_n) ?

4. On définit la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ par $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$.

(a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{7}$.

(b) Déterminer, en justifiant, la limite de (v_n) . En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

5. On considère la fonction  **seuil** ci-dessous, où A est un nombre réel strictement plus grand que 2. Donner, sans justification, la valeur renvoyée par la commande **seuil** (2.001) puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(A):
    n=0
    u=8
    while u>A:
        u=(6u+2)/(u+5)
        n=n+1
    return n
```

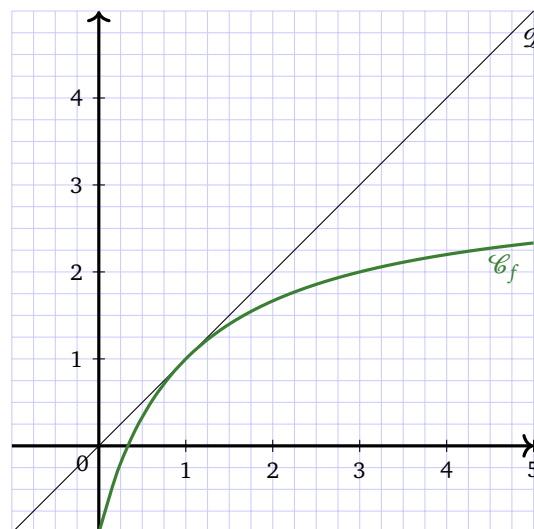
Exercice 39 Incontournable 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$ par $f(x) = 3 - \frac{4}{x+1}$.

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. On a tracé, ci-contre, la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.



(a) Placer sur l'axe des abscisses, u_0, u_1, u_2 et u_3 . Faire apparaître les traits de construction.

(b) Que peut-on conjecturer sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?

2. Dans cette question, nous allons démontrer les conjectures formulées à la question 1.b.

(a) Démontrer par un raisonnement par récurrence que $u_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Montrer que la fonction f est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

En déduire que pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} \leq u_n$.

(c) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 40 Suites imbriquées

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 16$; $v_0 = 5$ et pour tout entier naturel n

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{3u_n + 2v_n}{5} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et v_1 .

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par, $w_n = u_n - v_n$.

- (a) Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 0,1.
En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de w_n en fonction de n .
- (b) Préciser le signe de la suite (w_n) et la limite de cette suite.

3. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} - u_n = -0,4w_n$.
(b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est croissante. On admet ce résultat, et on remarque qu'on a alors : pour tout entier naturel n , $v_n \geq v_0 = 5$.

- (c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $u_n \geq 5$.
En déduire que la suite (u_n) est convergente. On appelle ℓ sa limite.

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est convergente. On admet ce résultat, et on appelle ℓ' la limite de (v_n) .

4. (a) Démontrer que $\ell = \ell'$.
(b) On considère la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par : $c_n = 5u_n + 4v_n$.
Démontrer que la suite (c_n) est constante, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n , on a : $c_{n+1} = c_n$.
En déduire que, pour tout entier naturel n , $c_n = 100$.
(c) Déterminer la valeur commune des limites ℓ et ℓ' .

Exercice 41 D'après Bac Métropole

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1$.

1. Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fractions irréductibles.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) .

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,5625
5	3	3,421875
6	4	4,31640625

2. (a) Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B ?
(b) Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) .
3. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $n \leq u_n \leq n + 1$.
(b) En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite (u_n) .
(c) Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1.$$

4. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$

- (a) Démontrer que (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.
(b) En déduire que pour tout entier naturel n on a

$$u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n.$$

- (c) Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$?

Exercice 42 Incontournable 3

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$.

1. (a) Calculer les termes u_1 , u_2 et u_3 . On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.
- (b) Recopier le script  ci-dessous et compléter les lignes 3 et 6 pour que `liste(k)` prenne en paramètre un entier naturel k et renvoie la liste des premières valeurs de la suite (u_n) de u_0 à u_k .

```
def liste(k):
    L = []
    u = .....
    for i in range(0, k+1):
        L.append(u)
        u = .....
    return(L)
```

2. On admet que pour tout entier naturel n , u_n est strictement positif.
Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
3. En déduire que la suite (u_n) converge.
4. (a) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n .
(b) Démontrer par récurrence la conjecture précédente.

Exercice 43 D'après Bac Asie 2021

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1 000 abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés. Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre d'abonnés à son profil en l'année $(2020 + n)$, suivant cette modélisation. Ainsi $u_0 = 1\,000$.

1. Calculer u_1 .
2. Justifier que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.
3. La fonction  nommée **suite** est définie ci-dessous. Dans le contexte de l'exercice, interpréter la valeur renvoyée par `suite(10)`.

```
def suite(n):
    u = 1000
    for i in range(n):
        u = 0.9 * u + 250
    return u
```

4. (a) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2\,500$.
(b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
(c) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.
5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2\,500$ pour tout entier naturel n .
(a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,9$ et de terme initial $v_0 = -1\,500$.
(b) Pour tout entier naturel n , exprimer v_n en fonction de n et montrer que $u_n = -1\,500 \times 0,9^n + 2\,500$.
(c) Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter dans le contexte de l'exercice.
6. Écrire un programme qui permet de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2 200.
Déterminer cette année.

Exercice 44 **Vrai ou faux ?**

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse donnée.

1. **Affirmation 1** : une suite divergente tend nécessairement vers l'infini.
2. **Affirmation 2** : toute suite bornée est convergente.
3. **Affirmation 3** : si une suite (u_n) n'est pas majorée, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
4. **Affirmation 4** : toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers 0.
5. On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ telle que pour tout entier n , $u_n \leq \frac{-9^n + 3^n}{7^n}$.
Affirmation 5 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.
6. Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n et vérifiant la relation suivante :

$$\text{pour tout entier naturel } n, \frac{1}{2} < u_n \leq \frac{3n^2 + 4n + 7}{6n^2 + 1}.$$

Affirmation 6 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

7. On considère la fonction suivante écrite en langage  python :

```
def terme(N):
    U=1
    for i in range(N):
        U=U+i
    return U
```

Affirmation 7 : `terme(4)` renvoie la valeur 7.

8. Lors d'un concours, le gagnant a le choix entre deux prix :
 - Prix A : il reçoit 1 000 euros par jour pendant 15 jours ;
 - Prix B : il reçoit 1 euro le 1^{er} jour, 2 euros le 2^e jour, 4 euros le 3^e jour et pendant 15 jours la somme reçue double chaque jour.

Affirmation 8 : la valeur du prix A est plus élevée que la valeur du prix B.

9. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs non nulles. On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $v_n = \frac{-\sqrt{2}}{u_n}$.

Affirmation 9 : si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par $\frac{-1}{\sqrt{2}}$.

10. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = \frac{1 + 3^n}{5 + 7^n}$.

Affirmation 10 : la suite (u_n) converge vers $\frac{3}{7}$.

Exercice 45 **Bac 2025 (sujet secours)**

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases}$$

Partie A : Conjecture

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Aucune justification n'est demandée.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			

2. Conjecturer la limite de la suite (u_n) .

Partie B : Étude d'une suite auxiliaire

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$$

1. Calculer w_0 .
2. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
3. Pour tout entier naturel n , exprimer w_n en fonction de n .
4. Montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n$$

5. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Partie C : Étude de la suite (u_n)

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente sans chercher à calculer la valeur de la limite.
3. On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation : $\ell = \ell - \frac{1}{4}\ell$.
Déterminer la limite de la suite (u_n) .