Corrigé de l'interrogation écrite 2

- Durée : 110 minutes
- Les calculatrices ne sont pas autorisées
- Nom :
- Prénom :

Exercice 1 Vrai ou faux ?

Répondre par VRAI ou FAUX à chacune des affirmations suivantes et justifier votre réponse.
Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans la notation.
Toutes les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \left(-2n + 5\sqrt{2}\right)\left(1 + 3n^3\right)$. 1 point

Affirmation 1 : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

On a

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} \left(-2n + 5\sqrt{2}\right) = -\infty, \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + 3n^3\right) = +\infty. \end{cases}$$

Donc, par la règle du produit des limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

L'affirmation 1 est donc **fausse**.

2. Soit (u_n) une suite vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 1 point

$$\frac{2n+1}{3n} < u_n \leq 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Affirmation 2 : $\frac{2}{3} \leq \lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leq 1$.

On pourrait croire qu'un simple passage à la limite donnerait l'encadrement ci-dessus. Cependant, cela n'est pas le cas, car la suite (u_n) n'est pas nécessairement convergente !
Contre-exemple : la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n \times (-1)^n$, vérifie bien l'encadrement donné dans l'énoncé mais n'admet pas de limite, à cause de son caractère oscillant. En effet, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ n'est même pas définie.

L'affirmation 2 est donc **fausse**.

3. On pose $S = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots + 2^{33}$. 1 point

Affirmation 3 : la somme S est égale à $8 \times \left(2^{30} - 1\right)$.

On a

$$\begin{aligned} S = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots + 2^{33} &= 2^3\left(1 + 2 + 2^2 + \cdots 2^{30}\right) \\ &= 2^3 \times \frac{1 - 2^{31}}{1 - 2} = 8 \times \frac{2^{31} - 1}{2 - 1} = 8 \times \left(2^{31} - 1\right). \end{aligned}$$

L'affirmation 3 est donc **fausse**.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \dfrac{25+(-1)^n}{n}$. 1 point

Affirmation 4 : (u_n) est une suite divergente.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{24}{n} \leq \frac{25+(-1)^n}{n} \leq \frac{26}{n}.$$

Or,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{24}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{26}{n} = 0.$$

Donc, par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

$\boxed{\text{L'affirmation 4 est donc } \textbf{fausse}.}$

5. Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} & \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

On admet que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{k}{u_n}$ où k est un nombre réel strictement positif. 1 point

Affirmation 5 : (v_n) est une suite arithmétique strictement croissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{k}{u_{n+1}} - \frac{k}{u_n} = \frac{k}{\dfrac{u_n}{1+u_n}} - \frac{k}{u_n} \\ &= \frac{k(1+u_n)}{u_n} - \frac{k}{u_n} = \frac{ku_n}{u_n} \\ &= k. \end{aligned}$$

Ainsi, la différence entre deux termes consécutifs de la suite (v_n) est constante (égale à k qui ne dépend pas de l'entier naturel n), ce qui montre que la suite (v_n) est arithmétique.
Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n > 0$, car $k \in \mathbb{R}_+^*$.
Donc (v_n) est strictement croissante.
Conclusion : (v_n) est une suite arithmétique strictement croissante.

$\boxed{\text{L'affirmation 5 est donc } \textbf{vraie}.}$

Exercice 2 Problème

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n+2}{2u_n+3} & \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. (a) Calculer u_1 et u_2. 1 point

On a

$$u_1 = \frac{3 \times 2 + 2}{2 \times 2 + 3} = \frac{8}{7} \qquad \text{et} \qquad u_2 = \frac{3 \times \frac{8}{7} + 2}{2 \times \frac{8}{7} + 3} = \frac{38}{37}.$$

(b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$. 3 points

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}(n)$ la relation $u_n > 1$.

- **Initialisation :** pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ et $2 > 1$, donc $u_0 > 1$.
  Ainsi $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
  Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie aussi.
  On sait que, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{2u_n + 3}$.
  En utilisant l'hypothèse de récurrence, il vient

$$\begin{aligned} u_n > 1 \quad & \Longleftrightarrow \quad u_n + 2u_n > 1 + 2u_n \\ & \Longleftrightarrow \quad 3u_n > 2u_n + 1 \\ & \Longleftrightarrow \quad 3u_n + 2 > 2u_n + 1 + 2 \\ & \Longleftrightarrow \quad 3u_n + 2 > 2u_n + 3 \\ & \Longleftrightarrow \quad \frac{3u_n + 2}{2u_n + 3} > 1 \qquad \text{car} \qquad 2u_n + 3 > 0. \end{aligned}$$

  Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est également vraie.
- **Conclusion :** on a prouvé que $\begin{cases} \mathscr{P}(0) \text{ est vraie,} \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1). \end{cases}$
  Donc, par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
  Autrement dit,

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \qquad u_n > 1.}$$

(c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 3 points

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-2(u_n - 1)(u_n + 1)}{2u_n + 3}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2}{2u_n + 3} - u_n = \frac{3u_n + 2 - 2u_n^2 - 3u_n}{2u_n + 3} = \frac{-2u_n^2 + 2}{2u_n + 3} = \frac{-2(u_n^2 - 1)}{2u_n + 3}.$$

Donc

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} - u_n = \frac{-2(u_n - 1)(u_n + 1)}{2u_n + 3}.}$$

(d) Que peut-on dire des variations de (u_n) ? 2 points

On sait que $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $u_n - 1 > 0$ et $u_n + 1 > 0$ pour tout entier naturel n.
De plus, $2u_n + 3 > 0$ pour tout n. Il s'ensuit que pour tout n, $u_{n+1} - u_n < 0$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$$

2. On définit la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ par

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}.$$

(a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. 2 points

Pour tout entier naturel n, on a

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\dfrac{3u_n + 2}{2u_n + 3} - 1}{\dfrac{3u_n + 2}{2u_n + 3} + 1} = \frac{\dfrac{u_n - 1}{2u_n + 3}}{\dfrac{5u_n + 5}{2u_n + 3}} = \frac{u_n - 1}{5(u_n + 1)} = \frac{1}{5} \times \frac{u_n - 1}{u_n + 1} = \frac{1}{5} v_n.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{5} \text{ et de premier terme } v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{1}{3}.}$$

(b) Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n. 1 point

D'après la question précédente,

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n.}$$

(c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 2 points

$$u_n = \frac{1 + \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^n}{1 - \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^n}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \quad &\Leftrightarrow \quad v_n(u_n + 1) = u_n - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad v_n u_n + v_n = u_n - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad u_n(1 - v_n) = 1 + v_n \\ &\Leftrightarrow \quad u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n} \end{aligned}$$

D'où le résultat.

(d) En déduire la limite de (u_n). 1 point

On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{5} < 1$.
Par opérations sur les limites, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{5}\right)^n} = \frac{1+0}{1-0}.$$

Autrement dit,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.}$$

3. Question subsidiaire.
Montrer que 2 points

$$\lim_{n\to+\infty}\left[v_0+v_1+v_2+\cdots+v_{n-1}\right] = \frac{5}{12}.$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
v_0+v_1+v_2+\cdots+v_{n-1} &= \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{5}\right)^2+\cdots+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\\
&= \frac{1}{3}\times\left[1+\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right]\\
&= \frac{1}{3}\times\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}} \qquad \text{car} \qquad \frac{1}{5}\neq 1\\
&= \frac{1}{3}\times\frac{5}{4}\times\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right]\\
&= \frac{5}{12}\times\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right].
\end{aligned}$$

Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{5} < 1$.
Par les règles de somme et de produit des limites, on conclut que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left[v_0+v_1+v_2+\cdots+v_{n-1}\right] = \frac{5}{12}.}$$