Interrogation écrite 1

- Durée : 45 minutes
- Les calculatrices ne sont pas autorisées
- Nom :
- Prénom :

Exercice 1

Soit la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= 3u_n + 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Déterminer u_1, u_2 et u_3. 1,5 points

On a

$$\begin{aligned} u_1 &= 3u_0 + 1 = 3 \times 2 + 1 = 6 + 1 = 7, \\ u_2 &= 3u_1 + 1 = 3 \times 7 + 1 = 21 + 1 = 22, \\ u_3 &= 3u_2 + 1 = 3 \times 22 + 1 = 67. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{u_1 = 7 \quad ; \quad u_2 = 22 \quad \text{et} \quad u_3 = 67.}$$

2. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2}(5 \times 3^n - 1)$. 3 points

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}(n)$ la relation $u_n = \frac{1}{2}(5 \times 3^n - 1)$.

- **Initialisation :** pour $n = 0$, on a $\frac{1}{2} \times \left(5 \times 3^0 - 1\right) = \frac{1}{2} \times 4 = 2$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
  Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
  On sait que, $u_{n+1} = 3u_n + 1$.
  En utilisant l'hypothèse de récurrence, il vient

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3 \times \frac{1}{2}(5 \times 3^n - 1) + 1 \\ &= \frac{1}{2}\left(5 \times 3^{n+1} - 3\right) + 1 \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \times 3^{n+1} - \frac{3}{2} + \frac{2}{2} \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \times 3^{n+1} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(5 \times 3^{n+1} - 1\right). \end{aligned}$$

  Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est également vraie.

➤ **Conclusion :** on a prouvé que

$$\begin{cases} \mathscr{P}(0) \text{ est vraie,} \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1). \end{cases}$$

Donc, par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
Autrement dit,

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{1}{2}\left(5 \times 3^n - 1\right).}$$

3. Étudier le sens de variations de (u_n). 1,5 points
On pourra admettre, si nécessaire, que la suite (u_n) est à termes strictement positifs.

➤ **Méthode 1 : utilisation de la formule explicite.**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2}\left(5 \times 3^{n+1} - 1\right) - \frac{1}{2}\left(5 \times 3^n - 1\right) \\ &= \frac{5}{2}\left(3^{n+1} - 3^n\right) \\ &= \frac{5 \times 3^n}{2} \times (3-1) \\ &= 5 \times 3^n > 0. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$.
Autrement dit,

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

➤ **Méthode 2 : utilisation de la forme récurrente.**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} = 3u_n + 1 \qquad \text{et donc} \qquad u_{n+1} - u_n = 2u_n + 1.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, et donc $2u_n + 1 > 0$ aussi.
Il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$.
Autrement dit,

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

4. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ? Justifier sa réponse. 1 point

➤ On a, $u_1 - u_0 = 5 \neq 15 = u_2 - u_1$.
Ainsi, la différence entre deux termes consécutifs de la suite (u_n) n'est pas constante.
Par conséquent,

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ n'est pas arithmétique.}}$$

➤ On a

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{7}{2} \neq \frac{22}{7} = \frac{u_2}{u_1}.$$

Ainsi, le quotient de deux termes consécutifs de la suite (u_n) n'est pas constant. Par conséquent,

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ n'est pas géométrique.}}$$

Exercice 2

Déterminer, en détaillant les étapes, la limite de (u_n) dans chacun des cas suivants.

1. $u_n = \dfrac{-5n^2 + 13n - \sqrt{2}}{\sqrt{11}n^2 - \pi n + 365}$ 2 points

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = \frac{-5n^2 + 13n - \sqrt{2}}{\sqrt{11}n^2 - \pi n + 365} = \frac{n^2\left(-5 + \frac{13}{n} - \frac{\sqrt{2}}{n^2}\right)}{n^2\left(\sqrt{11} - \frac{\pi}{n} + \frac{365}{n^2}\right)} = \frac{-5 + \frac{13}{n} - \frac{\sqrt{2}}{n^2}}{\sqrt{11} - \frac{\pi}{n} + \frac{365}{n^2}}.$$

Or, par la règle de la somme des limites, il vient

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(-5 + \frac{13}{n} - \frac{\sqrt{2}}{n^2}\right) = -5, \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{11} - \frac{\pi}{n} + \frac{365}{n^2}\right) = \sqrt{11}. \end{cases}$$

Ainsi, par la règle du quotient des limites,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{-5}{\sqrt{11}} = \frac{-5\sqrt{11}}{11}.}$$

2. $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{3n^3 + 5}$ 2 points

Par utilisation de l'expression conjuguée, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{3n^3 + 5} = \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{(3n^2+5)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} = \frac{1}{(3n^2+5)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}.$$

Or, par la règle de la somme des limites, on a

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(3n^2 + 5\right) = +\infty, \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right) = +\infty. \end{cases}$$

Donc, en appliquant la règle du produit des limites, puis la règle de l'inverse d'une limite, on obtient

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$