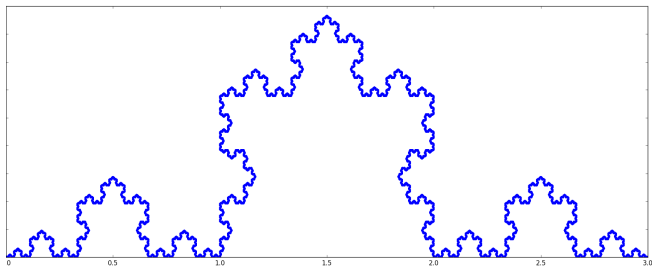


Chapitre 1 : suites numériques

Corrigé des exercices traités en classe

Lycée Français International de Hong Kong

2025-2026



Exercice 4 : sens de variation d'une suite

Étudier les variations de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

❶ $u_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$

❷ $u_n = \frac{n+1}{n-1}, n \text{ entier tel que } n \geq 2$

❸ $u_n = \sqrt{n-2}, n \text{ entier tel que } n \geq 2$

❹ $u_n = \frac{1}{n(n+1)}, n \in \mathbb{N}^*$

❺ $u_n = n^2 - 3n + 4, n \in \mathbb{N}^*$

❻ $u_n = \frac{7^n}{8^n}, n \in \mathbb{N}$

❼ $u_n = 3n^2 + n + 1, n \in \mathbb{N}$

❽ $u_n = 2n - (-1)^n, n \in \mathbb{N}$

❾ $u_n = \frac{2^{3n}}{3^{2n}}, n \in \mathbb{N}$

❿ $u_0 = 3 \text{ et } u_{n+1} = u_n - n^2, n \in \mathbb{N}$

⓫ $u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = u_n - \frac{2}{n+1}, n \in \mathbb{N}$

⓬ $u_0 = 200 \text{ et } u_{n+1} = 0,9u_n, n \in \mathbb{N}$

Corrigé de l'exercice 4

❶ Pour tout entier naturel n , on a

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= (-1)^{n+1} - (-1)^n = -1 \times (-1)^n - (-1)^n \\&= (-1)^n (-1 - 1) = -2 \times (-1)^n.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$u_{n+1} - u_n = \begin{cases} -2 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 2 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Ce qui veut dire que la différence entre deux termes consécutifs de la suite (u_n) n'est pas de signe constant. Autrement dit,

la suite (u_n) n'est pas monotone.

La suite $(-1)^n$ oscille entre -1 et 1 !

Corrigé de l'exercice 4

② Pour tout entier n tel que $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{n+2}{n} - \frac{n+1}{n-1} = \frac{(n-1)(n+2) - n(n+1)}{n(n-1)} \\ &= \frac{n^2 + n - 2 - n^2 - n}{n(n-1)} = \frac{-2}{n(n-1)} < 0 \end{aligned}$$

Il en résulte que

la suite (u_n) est strictement décroissante.

Corrigé de l'exercice 4

③ Pour tout entier n tel que $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \sqrt{n-1} - \sqrt{n-2} \\&= \frac{(\sqrt{n-1} - \sqrt{n-2})(\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2})}{(\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2})} \\&= \frac{\sqrt{n-1}^2 - \sqrt{n-2}^2}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2}} \\&= \frac{n-1 - (n-2)}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2}} \\&= \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2}} > 0\end{aligned}$$

Par conséquent,

la suite (u_n) est strictement croissante.

Corrigé de l'exercice 4

- ④ Pour tout entier naturel non nul n , $u_n > 0$ et

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \times \frac{n(n+1)}{1} \\ &= \frac{n}{n+2} < 1 \quad \text{car } 0 < n < n+2.\end{aligned}$$

On conclut que

la suite (u_n) est strictement décroissante.

Corrigé de l'exercice 4

⑤ Pour tout entier naturel non nul n ,

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \left[(n+1)^2 - 3(n+1) + 4 \right] - (n^2 - 3n + 4) \\&= n^2 + 2n + 1 - 3n - 3 + 4 - n^2 + 3n - 4 \\&= 2n - 2 = 2(n-1) \geq 0 \quad \text{car } n \in \mathbb{N}^*.\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Autrement dit,

la suite (u_n) est croissante.

Corrigé de l'exercice 4

- ⑥ Pour tout entier naturel n , on a $u_n > 0$.

Étudions le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{7^{n+1}}{\frac{8^{n+1}}{7^n}} = \frac{7^{n+1}}{8^{n+1}} \times \frac{8^n}{7^n} = \frac{7}{8}.$$

Puisque $\frac{7}{8} < 1$, cela indique que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_n > 0, \\ \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1. \end{cases}$$

Par conséquent, on conclut que

la suite (u_n) est strictement décroissante.

Corrigé de l'exercice 4

7 Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \left[3(n+1)^2 + (n+1) + 1 \right] - (3n^2 + n + 1) \\&= 3n^2 + 6n + 3 + n + 2 - 3n^2 - n - 1 \\&= 6n + 4.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$.

Ainsi,

la suite (u_n) est strictement croissante.

Corrigé de l'exercice 4

8 Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= [2(n+1) - (-1)^{n+1}] - [2n - (-1)^n] \\&= 2n + 2 - (-1)^{n+1} - 2n + (-1)^n \\&= 2 + \underbrace{(-1)^{n+2}}_{=(-1)^n} + (-1)^n = 2 + 2 \times (-1)^n = 2[1 + (-1)^n]\end{aligned}$$

Il en résulte que $u_{n+1} - u_n = \begin{cases} 4 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et donc

la suite (u_n) est croissante.

Corrigé de l'exercice 4

9 Pour tout entier naturel n , $u_n > 0$ et

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{2^{3(n+1)}}{\frac{3^{2(n+1)}}{2^{3n}}} = \frac{2^{3(n+1)}}{3^{2(n+1)}} \times \frac{3^{2n}}{2^{3n}} \\ &= \frac{2^{3n} \times 2^3 \times 3^{2n}}{3^{2n} \times 3^2 \times 2^{3n}} = \frac{8}{9} < 1.\end{aligned}$$

Par conséquent,

la suite (u_n) est strictement décroissante.

Corrigé de l'exercice 4

10 Pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = u_n - n^2 \quad \text{donc} \quad u_{n+1} - u_n = -n^2 \leq 0.$$

Il s'ensuit que

la suite (u_n) est décroissante.

Corrigé de l'exercice 4

⑪ Pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = u_n - \frac{2}{n+1} \quad \text{donc} \quad u_{n+1} - u_n = \frac{-2}{n+1} < 0.$$

Il en résulte que

la suite (u_n) est strictement décroissante.
--

Corrigé de l'exercice 4

12 Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n$.

Donc (u_n) est suite géométrique de raison $0,9$.

Par ailleurs, son premier terme vaut 200 .

Il s'ensuit que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 200 \times 0,9^n \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 200 \times 0,9^{n+1}.$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 0,9 < 1$.

On conclut que

la suite (u_n) est strictement décroissante.

Séance du 08.09.2005 (en ligne)

Exercice 14 : opérations sur les limites

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ dans chacun des cas suivants.

$$\textcircled{1} \quad u_n = n^3 + \frac{1}{n^2}$$

$$\textcircled{2} \quad u_n = n^{17} + n^2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^{17}}$$

$$\textcircled{3} \quad u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\textcircled{4} \quad u_n = 5n\sqrt{n}$$

$$\textcircled{5} \quad u_n = (3n - \sqrt{5}) \left(\frac{1}{n} - e \right)$$

$$\textcircled{6} \quad u_n = \frac{2\pi}{n^2 + 1}$$

$$\textcircled{7} \quad u_n = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{n^2 + 5}$$

$$\textcircled{8} \quad u_n = \frac{5 - \frac{1}{n^3}}{2 + \frac{1}{n^2}}$$

$$\textcircled{9} \quad u_n = \frac{-2}{1 - \frac{1}{n^2}}$$

$$\textcircled{10} \quad u_n = 3n^2 - \frac{4}{2n+1}$$

$$\textcircled{11} \quad u_n = \frac{-5n^3}{7e + \sqrt{101}}$$

$$\textcircled{12} \quad u_n = \left(\frac{1}{n} - 2 \right) n^3$$

$$\textcircled{13} \quad u_n = \frac{\frac{2}{n} - 1}{\frac{1}{n^2}}$$

Corrigé de l'exercice 14

① $u_n = n^3 + \frac{1}{n^2}$; $n \in \mathbb{N}^*$ où $n \in \mathbb{N}^*$ signifie $n \in \{1 ; 2 ; 3 ; \dots\}$

On sait que

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0. \end{cases}$$

Donc, par la règle de la somme des limites, **qui stipule que la limite de la somme est égale à la somme des limites**, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n^3 + \frac{1}{n^2} \right) = +\infty, \quad \text{autrement dit,} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Corrigé de l'exercice 14

2

$$u_n = n^{17} + n^2 + n + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^{17}} ; n \in \mathbb{N}^*$$

On sait que

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{17} = +\infty, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty. \end{array} \right.$$

Donc, par la règle de somme des limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^{17} + n^2 + n) = +\infty.$$

Aussi,

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{17}} = 0. \end{array} \right.$$

Donc, par la règle de la somme des limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^{17}} \right) = 0.$$

Par la règle de la somme des limites, on conclut que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Corrigé de l'exercice 14

3

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} ; n \in \mathbb{N}^*$$

Pour tout entier n tel que $n \geq 1$, on a

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Or, on sait que

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty. \end{cases}$$

Donc, par la règle du produit des limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(n+1) = +\infty$.

Ainsi, par la règle de l'inverse d'une limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0$.

Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Corrigé de l'exercice 14

14

$$u_n = 5n\sqrt{n} ; n \in \mathbb{N}$$

On sait que

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 5 = 5, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty. \end{array} \right.$$

Donc, par la règle du produit des limites

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Corrigé de l'exercice 14

5

$$u_n = (3n - \sqrt{5}) \left(\frac{1}{n} - e \right) ; n \in \mathbb{N}^*$$

Par la règle de somme des limites, on a

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} (3n - \sqrt{5}) = +\infty, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} - e \right) = -e. \end{cases}$$

Donc, par la règle du produit des limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (3n - \sqrt{5}) \left(\frac{1}{n} - e \right) = -\infty.$$

Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

Corrigé de l'exercice 14

$$6 \quad u_n = \frac{2\pi}{n^2 + 1} ; n \in \mathbb{N}$$

On sait que

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 2\pi = 2\pi, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 1) = +\infty. \end{cases}$$

Donc, par la règle du quotient des limites, **qui stipule que la limite du quotient est le quotient des limites**, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{n^2 + 1} = 0.$$

Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Corrigé de l'exercice 14

7
$$u_n = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{n^2 + 5} ; n \in \mathbb{N}$$

On sait que

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 5) = +\infty. \end{cases}$$

Donc, par la règle du quotient des limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{n^2 + 5} = 0.$$

Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Corrigé de l'exercice 14

8

$$u_n = \frac{5 - \frac{1}{n^3}}{\frac{2}{n^2} + 7} ; n \in \mathbb{N}^*$$

Par la règle de la somme des limites, on a

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(5 - \frac{1}{n^3} \right) = 5 & \text{car } \frac{1}{n^3} \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n^2} + 7 \right) = 7 & \text{car } \frac{2}{n^2} \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Donc, par la règle du quotient des limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 - \frac{1}{n^3}}{\frac{2}{n^2} + 7} = \frac{5}{7} \quad \text{autrement dit,}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{5}{7}.$$

Corrigé de l'exercice 14

9

$$u_n = \frac{-2}{1 - \frac{1}{n^2}}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

On sait que

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} (-2) = -2, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = 1. \end{cases}$$

Donc, par la règle du quotient des limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2}{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{-2}{1} = -2.$$

Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -2.$$

Corrigé de l'exercice 14

10

$$u_n = 3n^2 - \frac{4}{2n+1} ; n \in \mathbb{N}$$

On sait que

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 3n^2 = +\infty, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-4}{2n+1} \right) = 0. \end{cases}$$

Donc, par la règle de la somme des limites, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3n^2 - \frac{4}{2n+1} \right) = +\infty.$$

Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Corrigé de l'exercice 14

11

$$u_n = \frac{-5n^3}{7e + \sqrt{101}} ; n \in \mathbb{N}$$

On sait que

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} (-5n^3) = -\infty, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (7e + \sqrt{101}) = 7e + \sqrt{101} > 0. \end{cases}$$

Donc, par la règle du quotient des limites, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-5n^3}{7e + \sqrt{101}} = -\infty.$$

Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

Corrigé de l'exercice 14

$$12 \quad u_n = \left(\frac{1}{n} - 2 \right) n^3 ; n \in \mathbb{N}^*$$

Par la règle de la somme des limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} - 2 \right) = -2$.

De plus, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$.

Donc, par la règle du produit des limites, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{1}{n} - 2 \right) n^3 \right] = -\infty.$$

Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

Corrigé de l'exercice 14

13

$$u_n = \frac{\frac{2}{n} - 1}{\frac{1}{n^2}} ; n \in \mathbb{N}^*$$

D'une part,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n} - 1 \right) = -1 \quad \text{car} \quad \frac{2}{n} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad n \rightarrow +\infty.$$

D'autre part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0^+$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{n} - 1}{\frac{1}{n^2}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty.$$

Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

Exercice 15 : quelques formes indéterminées

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ dans chacun des cas suivants.

① $u_n = n - n^2$

② $u_n = 2n^2 - 5n + \sqrt{7}$

③ $u_n = n^3\sqrt{n} - \sqrt{n}$

④ $u_n = \frac{n+1}{n}$

⑤ $u_n = \frac{3n^2 - 5n + 2}{6n^2 + 5n + 1}$

⑥ $u_n = \frac{n^2 - 1}{n + 1}$

⑦ $u_n = \frac{3\sqrt{n}}{2n + 1}$

⑧ $u_n = 5n\sqrt{n} - 2n^3$

⑨ $u_n = (n + \frac{1}{n})^2 - n^2$

⑩ $u_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$

⑪ $u_n = \frac{n - \sqrt{n^2 + 1}}{n + \sqrt{n^2 + 1}}$

Corrigé de l'exercice 15

① $u_n = n - n^2 ; n \in \mathbb{N}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = n - n^2 = n^2 \left(\frac{1}{n} - 1 \right).$$

Or,

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) = -1. \end{cases}$$

Donc, par la règle du produit des limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\frac{1}{n} - 1 \right) = -\infty.$$

Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

Corrigé de l'exercice 15

②

$$u_n = 2n^2 - 5n + \sqrt{7} ; n \in \mathbb{N}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = 2n^2 - 5n + \sqrt{7} = n^2 \left(2 - \frac{5}{n} + \frac{\sqrt{7}}{n^2} \right).$$

Or,

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{5}{n} + \frac{\sqrt{7}}{n^2} \right) = 2. \end{cases}$$

Donc, par la règle du produit des limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(2 - \frac{5}{n} + \frac{\sqrt{7}}{n^2} \right) = +\infty.$$

Autrement dit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$

Corrigé de l'exercice 15

8

$$n^3\sqrt{n} - \sqrt{n} ; n \in \mathbb{N}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = n^3\sqrt{n} - \sqrt{n} = \sqrt{n}(n^3 - 1).$$

Or,

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 - 1) = +\infty. \end{cases}$$

Donc, par la règle du produit des limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}(n^3 - 1) = +\infty.$$

Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Corrigé de l'exercice 15

4

$$u_n = \frac{n+1}{n} ; n \in \mathbb{N}^*$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = \frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n}.$$

Or,

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0. \end{cases}$$

Donc, par la règle de la somme des limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1 + 0 = 1.$$

Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

Corrigé de l'exercice 15

5

$$u_n = \frac{3n^2 - 5n + 2}{6n^2 + 5n + 1} ; n \in \mathbb{N}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = \frac{3n^2 - 5n + 2}{6n^2 + 5n + 1} = \frac{n^2 \left(3 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2} \right)}{n^2 \left(6 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \right)} = \frac{3 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}}{6 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}}.$$

Or,

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2} \right) = 3, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(6 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = 6. \end{cases}$$

Donc, par la règle du quotient des limites, on conclut que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Corrigé de l'exercice 15

6

$$u_n = \frac{n^2 - 1}{n + 1} ; n \in \mathbb{N}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par identité remarquable

$$u_n = \frac{n^2 - 1}{n + 1} = \frac{(n + 1)(n - 1)}{n + 1} = n - 1.$$

$$\text{Or, } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1. \end{cases}$$

Donc, par la règle de la somme des limites, on conclut que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 1) = +\infty.$$

Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Corrigé de l'exercice 15

7

$$u_n = \frac{3\sqrt{n}}{2n+1} ; n \in \mathbb{N}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en factorisant par $\sqrt{n}$ dans le dénominateur, on a

$$u_n = \frac{3\sqrt{n}}{2n+1} = \frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\frac{2n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{3}{2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}} \quad \text{car} \quad \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Or,

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 = 3, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = +\infty \end{cases} \quad \text{car} \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Ainsi, par la règle du quotient des limites, on conclut que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Corrigé de l'exercice 15

8

$$u_n = 5n\sqrt{n} - 2n^3, \quad n \in \mathbb{N}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en factorisant u_n par $n\sqrt{n}$, on obtient

$$u_n = n\sqrt{n} \left(5 - \frac{2n^3}{n\sqrt{n}} \right) = n\sqrt{n} \left(5 - \frac{2n\sqrt{n} \times \color{blue}{n\sqrt{n}}}{\color{blue}{n\sqrt{n}}} \right) = n\sqrt{n} (5 - 2n\sqrt{n})$$

Or,

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} n\sqrt{n} = +\infty, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (5 - n\sqrt{n}) = -\infty. \end{cases}$$

Par la règle du produit des limites, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\sqrt{n} (5 - 2\sqrt{n}) = -\infty$.

Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

Corrigé de l'exercice 15

9

$$u_n = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2 ; n \in \mathbb{N}^*$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2 = n^2 + 2 \times n \times \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - n^2 = 2 + \frac{1}{n^2}.$$

Or,

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 = 2, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0. \end{cases}$$

Donc, par la règle de la somme des limites, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n^2}\right) = 2 + 0 = 2.$$

Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2.$$

Corrigé de l'exercice 15

10

$$u_n = \sqrt{n^2 + 1} - n ; n \in \mathbb{N}^*$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par utilisation de l'expression conjuguée,

$$u_n = \sqrt{n^2 + 1} - n = \frac{(\sqrt{n^2 + 1} - n)(\sqrt{n^2 + 1} + n)}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n}.$$

Or,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 1} + n) = +\infty.$$

Donc, par la règle de l'inverse d'une limite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = 0$.

Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Corrigé de l'exercice 15

11

$$u_n = \frac{n - \sqrt{n^2 + 1}}{n + \sqrt{n^2 + 1}} ; n \in \mathbb{N}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par utilisation de l'expression conjuguée, qui permet d'éliminer la racine carrée pour simplifier l'analyse,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n - \sqrt{n^2 + 1}}{n + \sqrt{n^2 + 1}} \\ u_n &= \frac{(n - \sqrt{n^2 + 1})(n + \sqrt{n^2 + 1})}{(n + \sqrt{n^2 + 1})(n + \sqrt{n^2 + 1})} \\ u_n &= \frac{n^2 - \sqrt{n^2 + 1}^2}{(n + \sqrt{n^2 + 1})^2} \\ u_n &= \frac{n^2 - (n^2 + 1)}{(n + \sqrt{n^2 + 1})^2}. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 15

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{-1}{\left(n + \sqrt{n^2 + 1}\right)^2}$.

Or,

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + 1} = +\infty. \end{cases}$$

Donc, par la règle de la somme des limites, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n + \sqrt{n^2 + 1}\right) = +\infty.$$

On conclut par la règle de l'inverse d'une limite, que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\left(n + \sqrt{n^2 + 1}\right)^2} = 0.$$

Exercice 19 : encadrement de limites

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ dans chacun des cas suivants.

$$\textcircled{1} \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

$$\textcircled{2} \quad u_n = \frac{n - (-1)^n}{n}$$

$$\textcircled{3} \quad u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{1 + n + n^2}$$

$$\textcircled{4} \quad u_n = \frac{\sin n}{n}$$

$$\textcircled{5} \quad u_n = \frac{n + \cos n}{n - \sin n}$$

$$\textcircled{6} \quad u_n = \frac{4n^2 - \sin n}{\cos n + 6n^2}$$

$$\textcircled{7} \quad u_n = \frac{\cos(n\pi)}{n^2 + 1}$$

$$\textcircled{8} \quad u_n =$$

$$\frac{2 \sin \left(\frac{(-2)^n}{n} \right)}{n^3 + \sqrt{5}}$$

$$\textcircled{9} \quad u_n = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi \right)}{n^4 + 7}$$

$$\textcircled{10} \quad u_n = 5n^2 + \frac{\sin n}{n^2 + 7}$$

Corrigé de l'exercice 19

$$\textcircled{1} \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n} ; n \in \mathbb{N}^*$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Or,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Donc, par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Corrigé de l'exercice 19

2

$$u_n = \frac{n - (-1)^n}{n} ; n \in \mathbb{N}^*$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = \frac{n - (-1)^n}{n} = 1 - \frac{(-1)^n}{n}.$$

Or, d'après la question précédente, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Donc, par la règle de la somme des limites, on conclut que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{(-1)^n}{n} \right) = 1 - 0 = 1.$$

Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

Corrigé de l'exercice 19

3

$$u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{1 + n + n^2}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait que $1 + n + n^2 > 0$. Il s'ensuit que

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{1 + n + n^2} \leq \frac{(-1)^n}{1 + n + n^2} \leq \frac{1}{1 + n + n^2}.$$

Or,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{1 + n + n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + n + n^2} = 0.$$

Donc, par le théorème des gendarmes, il vient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n + n^2} = 0$.

Ainsi, par la règle de la somme des limites, on conclut que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3 + 0 = 3.$$

Corrigé de l'exercice 19

4

$$u_n = \frac{\sin n}{n} ; n \in \mathbb{N}^*$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$-1 \leq \sin n \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Or,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Donc, par le théorème des gendarmes, il vient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

Corrigé de l'exercice 19

5

$$u_n = \frac{n + \cos n}{n - \sin n} ; n \in \mathbb{N}^*$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en factorisant, puis simplifiant par n , on a

$$\frac{n + \cos n}{n - \sin n} = \frac{n \left(1 + \frac{\cos n}{n}\right)}{n \left(1 - \frac{\sin n}{n}\right)} = \frac{1 + \frac{\cos n}{n}}{1 - \frac{\sin n}{n}}.$$

Or, par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$.

Donc, par les règles de somme et de quotient des limites, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\cos n}{n}}{1 - \frac{\sin n}{n}} = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1.$$

Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

Corrigé de l'exercice 19

6

$$u_n = \frac{4n^2 - \sin n}{\cos n + 6n^2} ; n \in \mathbb{N}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = \frac{4n^2 - \sin n}{\cos n + 6n^2} = \frac{n^2 \left(4 - \frac{\sin n}{n^2} \right)}{n^2 \left(\frac{\cos n}{n^2} + 6 \right)} = \frac{4 - \frac{\sin n}{n^2}}{\frac{\cos n}{n^2} + 6}.$$

Or, par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n}{n^2} = 0$,
Ainsi, par les règles de somme et de quotient des limites, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4 - \frac{\sin n}{n^2}}{\frac{\cos n}{n^2} + 6} = \frac{4 - 0}{0 + 6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{3}.$$

Corrigé de l'exercice 19

$$7 \quad \boxed{u_n = \frac{\cos(n\pi)}{n^2 + 1} ; n \in \mathbb{N}}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + 1 > 0$ et

$$-1 \leq \cos(n\pi) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{n^2 + 1} \leq \frac{\cos(n\pi)}{n^2 + 1} \leq \frac{1}{n^2 + 1}.$$

Or,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = 0.$$

Donc, par le théorème des gendarmes, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^2 + 1} = 0$.

Autrement dit,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.}$$

On peut également remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos(n\pi) = (-1)^n$, ce qui confirme que $\cos(n\pi)$ oscille entre -1 et 1.

Corrigé de l'exercice 19

8

$$u_n = \frac{2 \sin \left(\frac{(-2)^n}{n} \right)}{n^3 + \sqrt{5}} ; n \in \mathbb{N}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 + \sqrt{5} > 0$ et

$$-1 \leq \sin \left(\frac{(-2)^n}{n} \right) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{-2}{n^3 + \sqrt{5}} \leq \frac{2 \sin \left(\frac{(-2)^n}{n} \right)}{n^3 + \sqrt{5}} \leq \frac{2}{n^3 + \sqrt{5}}.$$

$$\text{Or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2}{n^3 + \sqrt{5}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n^3 + \sqrt{5}} = 0.$$

$$\text{Donc, d'après le théorème des gendarmes, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \sin \left(\frac{(-2)^n}{n} \right)}{n^3 + \sqrt{5}} = 0.$$

Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Corrigé de l'exercice 19

9

$$u_n = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right)}{n^4 + 7} ; n \in \mathbb{N}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par 2π -périodicité de la fonction sinus,

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2(n^4 + 7)}$.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2(n^4 + 7) = +\infty$, donc par la règle de l'inverse d'une limite, on

conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(n^4 + 7)} = 0$.

Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

On aurait pu utiliser l'encadrement $-1 \leq \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right)}{n^4 + 7} \leq 1$ et appliquer le théorème des gendarmes pour conclure également que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Corrigé de l'exercice 19

10

$$u_n = 5n^2 + \frac{\sin n}{n^2 + 7} ; n \in \mathbb{N}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + 7 > 0$ et donc $\frac{-1}{n^2 + 7} \leq \frac{\sin n}{n^2 + 7} \leq \frac{1}{n^2 + 7}$.

Or,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n^2 + 7} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 + 7} = 0.$$

Donc par le théorème des gendarmes

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n^2 + 7} = 0.$$

Par ailleurs $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5n^2 = +\infty$. Donc, par la règle de la somme des limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(5n^2 + \frac{\sin n}{n^2 + 7} \right) = +\infty.$$

Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$