

Manipuler les nombres réels

I Le cours

1. Ensembles de nombres

Définition 1 : ensemble de nombres

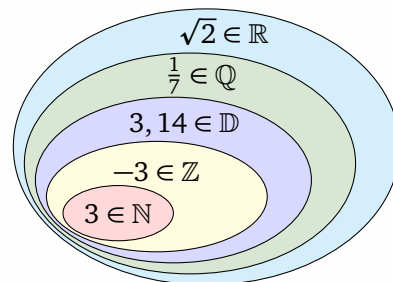
Un **ensemble de nombres** est l'un des ensembles classiques construits à partir de l'ensemble des entiers naturels et munis d'opérations arithmétiques.

Exemples

- L'ensemble des **nombres entiers naturels** $\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; \dots\}$.
- L'ensemble des **nombres entiers relatifs** $\mathbb{Z} = \{\dots ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; \dots\}$.
Nicolas Bourbaki^a popularise l'usage de la lettre $\mathbb{Z}$, initiale de l'allemand *Zahlen* (nombres).
- L'ensemble des **nombres décimaux** $\mathbb{D}$.
L'écriture décimale de ces nombres ne comporte qu'un nombre fini de chiffres après la virgule.
Un nombre décimal s'écrit aussi sous la forme $\frac{a}{10^n}$ où a est un entier relatif et n un entier naturel.
 $0,33 = \frac{33}{100} = \frac{33}{10^2} \in \mathbb{D}$, cependant $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.
- L'ensemble des **nombres rationnels** $\mathbb{Q}$, baptisé ainsi par le mathématicien Peano en 1895 d'après l'initiale du mot italien *Quoziente*.
Un nombre rationnel peut s'exprimer sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
 $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$, cependant $\sqrt{2}$ et π ne sont pas rationnels. On parle de nombres irrationnels.
- L'ensemble des **nombres réels** $\mathbb{R}$.
Un réel est un nombre qui peut être représenté par une partie entière munie d'un signe positif ou négatif, et une liste finie ou infinie de décimales. $\mathbb{R}$ contient les nombres rationnels et irrationnels.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

☞ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ se lit $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$.



^a. mathématicien imaginaire, sous le nom duquel un groupe de mathématiciens francophones, formé en 1935, a commencé à écrire et à éditer des textes mathématiques. L'objectif premier était la rédaction d'un traité d'analyse.

Propriété 1 : $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$

$\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Démonstration (exigible)

On procède par l'absurde.

On suppose que $\frac{1}{3} \in \mathbb{D}$. Il existe donc deux entiers naturels a et n tels que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$, ou encore $10^n = 3a$.

Cela voudrait dire que 10^n est un multiple de 3.

Or, la somme des chiffres de 10^n est égale à 1, quel que soit l'entier naturel n .

Donc, d'après le critère de divisibilité par 3, 10^n n'est pas un multiple de 3. On obtient une **contradiction**.

Ainsi notre hypothèse de départ est fautive et on conclut que $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

Propriété 2 : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Démonstration (exigible)

On procède par l'absurde.

Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Il existe donc $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ (où $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible).

En élevant au carré, on obtient $(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$. Ce qui donne $2 = \frac{p^2}{q^2}$, ou encore $p^2 = 2q^2$.

Cela voudrait dire que p^2 est pair. Or, le carré d'un entier impair est impair (voir exercice 3).

Ainsi p ne peut pas être impair, il est donc pair. On en déduit qu'il existe un entier k tel que $p = 2k$.

En remplaçant p par $2k$ dans l'égalité $p^2 = 2q^2$, on obtient $(2k)^2 = 2q^2$, ou encore $q^2 = 2k^2$.

Il en résulte que q^2 est pair. Par conséquent q est pair.

On aurait donc p et q deux nombres pairs et $\frac{p}{q}$ une fraction irréductible, ce qui est **contradictoire**!

On conclut que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

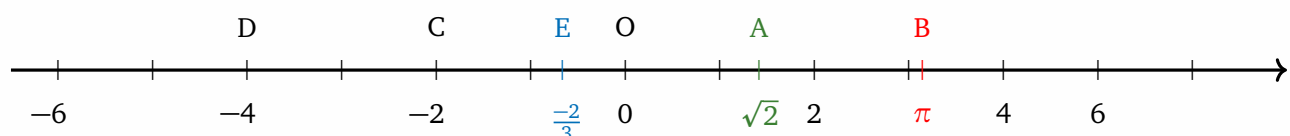
2. La droite réelle

Définition 2 : droite réelle

L'ensemble des nombres réels est généralement représenté par une droite graduée, d'où l'expression de droite réelle.

- On associe à chaque point de la droite réelle un nombre, son abscisse.
- Réciproquement, on associe à chaque nombre réel un point de la droite réelle.

Exemples



- On associe au point A son abscisse, le nombre $\sqrt{2}$.
- On associe au nombre π le point B.

3. Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 3 : intervalle fermé

Soient a et b deux nombres réels tels que $a \leq b$.

- L'intervalle $[a ; b]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leq x \leq b$.
C'est un intervalle **fermé** car il contient les bornes a et b .
- Le réel $b - a$ est appelé **amplitude** ou **longueur** de l'intervalle $[a ; b]$.

Exemples

- L'intervalle $[-3 ; 7]$ est l'ensemble des réels compris entre -3 et 7 .
- Son amplitude est $7 - (-3) = 7 + 3 = 10$.
- Les bornes -3 et 7 appartiennent à l'intervalle $[-3 ; 7]$. On note $-3 \in [-3 ; 7]$ et $7 \in [-3 ; 7]$.
- On représente graphiquement l'intervalle $[-3 ; 7]$ de la manière suivante.



Définition 4 : intervalle ouvert

Soient a et b deux nombres réels tels que $a \leq b$.

L'intervalle $]a ; b[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a < x < b$.

C'est un intervalle **ouvert** car il ne contient pas les bornes a et b .

Exemples

- L'intervalle $] -3 ; 7[$ est l'ensemble des réels compris strictement entre -3 et 7 .
- Son amplitude est $7 - (-3) = 7 + 3 = 10$.
- Les bornes -3 et 7 n'appartiennent pas à l'intervalle $] -3 ; 7[$. On note $-3 \notin] -3 ; 7[$ et $7 \notin] -3 ; 7[$.
- On représente graphiquement l'intervalle $] -3 ; 7[$ de la manière suivante.



Définition 5 : intervalle non borné

Soient a et b deux nombres réels tels que $a \leq b$.

- L'intervalle $] -\infty ; a]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x \leq a$.
- L'intervalle $] -\infty ; a[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x < a$.
- L'intervalle $[a ; +\infty[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x \geq a$.
- L'intervalle $]a ; +\infty[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x > a$.

Exemples

- L'intervalle $] -\infty ; -3[$ est l'ensemble des réels x tels que $x < -3$.
- On a $-5 \in] -\infty ; -3[$ et $\sqrt{2} \notin] -\infty ; -3[$.

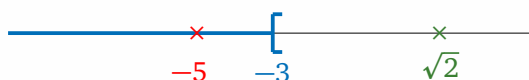


Tableau récapitulatif

Ensemble des réels x tels que	Notation	Représentation graphique
$a \leq x \leq b$	$[a ; b]$	
$a < x < b$	$]a ; b[$	
$a \leq x < b$	$[a ; b[$	
$a < x \leq b$	$]a ; b]$	
$x > a$	$]a ; +\infty[$	
$x \geq a$	$[a ; +\infty[$	
$x < b$	$] -\infty ; b[$	
$x \leq b$	$] -\infty ; b]$	

Définition 6 : réunion d'intervalles

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

La réunion des intervalles I et J , notée $I \cup J$, est l'ensemble des nombres réels appartenant à I **ou** à J .

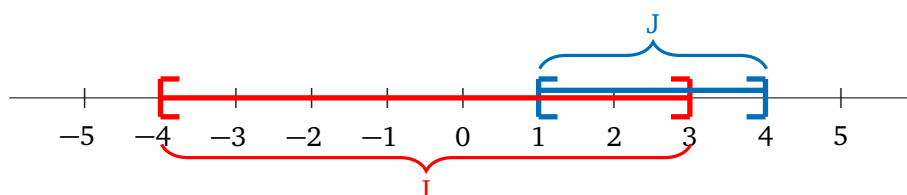
Définition 7 : intersection d'intervalles

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

L'intersection des intervalles I et J , notée $I \cap J$, est l'ensemble des nombres réels appartenant à I **et** à J .

Exemples

Déterminons la réunion ainsi que l'intersection des intervalles $I = [-4 ; 3]$ et $J = [1 ; 4]$.
Par représentation graphique, on a



Il s'ensuit que

$$I \cup J = [-4 ; 4] \quad \text{et} \quad I \cap J = [1 ; 3].$$

4. Inégalités

Propriété 3 : addition et soustraction dans les inégalités

Soient a , b et c trois nombres réels.

$$\triangleright a < b \Leftrightarrow a+c < b+c$$

$$\triangleright a < b \Leftrightarrow a-c < b-c$$

Propriété 4 : multiplication et division dans les inégalités

Soient a , b et c trois nombres réels. Soit k un nombre réel non nul.

$\triangleright$ 1^{er} cas : le réel k est strictement positif.

$$a < b \Leftrightarrow ka < kb \quad \text{l'ordre est conservé}$$

$$a < b \Leftrightarrow \frac{a}{k} < \frac{b}{k} \quad \text{l'ordre est conservé}$$

$\triangleright$ 2^e cas : le réel k est strictement négatif.

$$a < b \Leftrightarrow ka > kb \quad \text{l'ordre n'est pas conservé}$$

$$a < b \Leftrightarrow \frac{a}{k} > \frac{b}{k} \quad \text{l'ordre n'est pas conservé}$$

Propriété 5 : addition membre à membre d'inégalités

Soient a , b , c et d quatre nombres réels.

Si $a < x < b$ et $c < y < d$, alors $a + c < x + y < b + d$.

Autrement dit, on peut ajouter membre à membre deux inégalités.

 On ne peut pas soustraire membre à membre deux inégalités.

5. Distance entre deux nombres réels

Définition 8 : valeur absolue

La valeur absolue d'un nombre réel x , notée $|x|$ est la distance entre x et 0.

On peut définir la valeur absolue d'un nombre réel x de la manière suivante :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ est positif} \\ -x & \text{si } x \text{ est négatif} \end{cases}$$

Exemples

$$\triangleright |5| = 5 \text{ car } 5 \text{ est positif.}$$

$$\triangleright |-3| = 3 \text{ car } -3 \text{ est négatif.}$$

$$\triangleright |\pi - \sqrt{2}| = \pi - \sqrt{2} \text{ car } \pi - \sqrt{2} \text{ est positif.}$$

$$\triangleright \left| \frac{3}{2} - \pi \right| = \pi - \frac{3}{2} \text{ car } \frac{3}{2} - \pi \text{ est négatif.}$$

Propriété 6 : racine carrée d'un carré (admise)

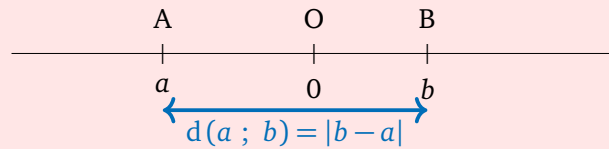
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{x^2} = |x|$.

Définition 9 : distance entre deux nombres réels

Soient a et b deux nombres réels.

Le réel $|b - a|$ représente la distance entre les nombres a , b . On note cette distance $d(a ; b)$.

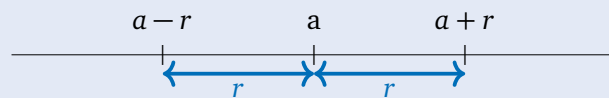
C'est la longueur AB, où a est l'abscisse du point A et b celle du point B.



Propriété 7 : condition $|x - a| \leq r$

La condition $|x - a| \leq r$ est équivalente à $d(x ; a) \leq r$.

Ainsi, l'ensemble des nombres réels x vérifiant la condition $|x - a| \leq r$ est l'intervalle $[a - r ; a + r]$.



Méthode 1 : incontournable

Soient x et y deux nombres réels tels que : $d(x ; -6) \leq 4$ et $|y - 5| \leq 3$

- ❶ À quel intervalle appartient le réel $x + y$?
- ❷ À quel intervalle appartient le réel $x - y$?

Corrigé

On commence par déterminer d'abord un encadrement de x et de y .

La condition $d(x ; -6) \leq 4$ est équivalente à $-6 - 4 \leq x \leq -6 + 4$, ou encore $-10 \leq x \leq -2$.

Par ailleurs, la condition $|y - 5| \leq 3$ signifie que $-3 \leq y - 5 \leq 3$, ou encore $2 \leq y \leq 8$.

- ❶ On additionne membre à membre :

$$-10 + 2 \leq x + y \leq -2 + 8.$$

Par conséquent $x + y \in [-8 ; 6]$.

- ❷ On ne peut pas soustraire membre à membre. On détermine un encadrement de $-y$.

On a $2 \leq y \leq 8$, donc $-8 \leq -y \leq -2$.

On peut à présent additionner membre à membre :

$$-10 + (-8) \leq x + (-y) \leq -2 + (-2).$$

Il s'ensuit que $x - y \in [-18 ; -4]$.

II Les exercices

1. Les bases du calcul

Exercice 1 Calculer avec des fractions

Calculer puis donner les résultats sous forme de fraction irréductible.

1. $A = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{7}{8}$

2. $B = \left(\frac{2}{6} + \frac{2}{5}\right) \times \frac{3}{4}$

3. $C = \frac{3}{7} - \frac{1}{7} \times \frac{25}{15}$

4. $D = \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{-4}\right)$

5. $E = \frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{2}{3}}$

6. $F = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{5}{4}}{\frac{5}{8} - \frac{7}{6}}$

Exercice 2 D'après lycée Louis-le-Grand/ lycée Henri-IV

Trouver le nombre caché à la place de ♠ et ♣.

1. $\frac{87}{60} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{\spadesuit}$

2. $\frac{31}{17 + \frac{101}{8 - \clubsuit}} = \frac{2015}{2014}$

Exercice 3 Utiliser des puissances

Écrire chacun des nombres ci-dessous sous la forme a^n où a est un entier naturel et n un entier relatif.

1. $A = 5^3 \times 5^{-7}$

2. $B = 2^4 \times 8^{-2}$

3. $C = \frac{2^3}{4^3}$

4. $D = \frac{7^3 \times (-49)^6}{7^{-12}}$

5. $E = 0,25^{-5} \times 4^{-7}$

6. $F = \frac{3^{-4} \times 9^2 \times 27^3}{3^6 \times \frac{1}{3^{-3}}}$

Exercice 4 Écriture scientifique d'un nombre

Déterminer l'écriture scientifique de chacun des nombres suivants.

1. $A = \frac{-2,4 \times 10^7 \times 8 \times 10^{-9}}{3 \times 10^{-3}}$

2. $B = 3 \times 10^{-4} \times 7 \times 10^6 \times 1,25$

3. $C = \frac{4 \times 10^{12} \times 0,5}{9 \times 10^{11}}$

4. $D = \frac{7 \times 10^{-12} \times 4 \times 10^5}{2 \times 10^{-4}}$

5. $E = 153 \times 10^{-4} + 32 \times 10^{-3} - 16 \times 10^{-5}$

6. $F = \frac{0,08 \times 10 - 14 \times 0,0025}{160 \times 10^5}$

2. Géométrie

Exercice 5 D'après un ancien sujet de Brevet

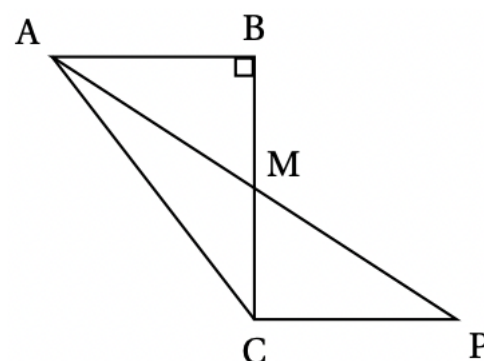
ABC est un triangle tel que $AB = 4,2$ cm ; $AC = 5,6$ cm et $BC = 7$ cm.

- Démontrer que ABC est un triangle rectangle.
- Calculer son aire.
- On sait que si R est le rayon du cercle circonscrit à un triangle dont les côtés ont pour longueurs a, b, c données en cm, l'aire de ce triangle est égale à $\frac{abc}{4R}$.
 - En utilisant cette formule, calculer le rayon du cercle circonscrit à ABC.
 - Pouvait-on prévoir ce résultat ? Justifier la réponse.

Exercice 6 Problème

Préliminaire

- D'après la figure ci-contre :
Tracer ABCP en respectant les données suivantes :
 $AB = 6$ cm ; $BC = 8$ cm
 $BM = 3$ cm $(CP) \parallel (AB)$
- Mesurer les angles $\widehat{BAM}$ et $\widehat{MAC}$.
Pourquoi ces mesures ne permettent-elles pas d'affirmer que (AM) est la bissectrice de $\widehat{BAC}$?



Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A

- En considérant le triangle ABL :
 - Calculer AC.
 - Calculer $\widehat{BAC}$ et $\widehat{SAM}$ le plus précisément possible.
Expliquer pourquoi les valeurs obtenues ne permettent pas d'affirmer que (AM) est la bissectrice de $\widehat{BAC}$.
- En considérant les triangles ABM et MCP, calculer CP.
- Quelle est la nature de ACP ? Que peut-on en déduire pour $\widehat{MAC}$ et $\widehat{CPM}$?
- Démontrer que $\widehat{MAC} = \widehat{BAM}$ et donc que (AM) est bien la bissectrice de $\widehat{BAC}$.

Partie B

- (AM) est, d'après la partie A la bissectrice de $\widehat{BAC}$.
Sur la figure tracée à la première question du préliminaire :
 - tracer la bissectrice, d , de $\widehat{ABM}$;
 - nommer O le point d'intersection de la droite d et de la droite (AM) ;
 - tracer la hauteur issue de O du triangle AOB et la hauteur issue de O du triangle BOM.
Ces hauteurs sont des rayons du cercle inscrit dans le triangle BAC.
 - Tracer ce cercle.
- Calculer l'aire du triangle ABM.
 - Exprimer l'aire du triangle AOB et l'aire du triangle BOM en fonction du rayon r du cercle inscrit dans le triangle BAC.
 - Trouver une relation entre ces trois aires. En déduire le rayon r .

3. Ensembles de nombres

Exercice 7 Utilisation de symboles mathématiques

Compléter avec les symboles : $\in$ (appartient), $\notin$ (n'appartient pas), $\subset$ (est inclus dans) ou $\not\subset$ (n'est pas inclus dans).

1. $\frac{5}{3} \dots \mathbb{D}$

4. $\frac{20}{5} \dots \mathbb{N}$

7. $\frac{1}{2^{-3}} \dots \mathbb{N}$

2. $\mathbb{Z} \dots \mathbb{N}$

5. $\pi \dots \mathbb{Q}$

8. $2^{-2} \dots \mathbb{D}$

3. $3\sqrt{100} \dots \mathbb{N}$

6. $\mathbb{Q} \dots \mathbb{D}$

9. $\left(\frac{-1}{3}\right)^0 \dots \mathbb{Z}$

Exercice 8

Pour chaque cas, trouver si possible, un nombre x qui vérifie les conditions énoncées.

1. $x \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Z}$

3. $x \notin \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{N}$

5. $x \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{N}$

2. $x \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{Z}$

4. $x \in \mathbb{D}$ et $x \in \mathbb{N}$

6. $x \in \mathbb{R}$ et $x \notin \mathbb{Q}$

Exercice 9 Démonstration

Démontrer que le carré d'un nombre impair est impair.

Exercice 10

Compléter le tableau suivant.

Intervalle	Inégalité(s)	Langage usuel	Schéma
$x \in [-1 ; 10]$			
		x strictement inférieur à -2	
	$x \geq 3$		
$x \in]-\infty ; 0]$			
	$-6 < x \leq -1$		
			

Exercice 11

Soit x un réel tel que $x \in]-\infty ; 5]$.

1. À quel intervalle appartient le réel $2x - 3$?
2. À quel intervalle appartient le réel $-3x + 1$?

Exercice 12

Soient x et y deux nombres réels tels que $2 < x < 3$ et $-5 < y < -4$.

1. À quel intervalle appartient le réel $x + y$?
2. À quel intervalle appartient le réel $x - y$?
3. À quel intervalle appartient le réel $-2x + 3y$?

Exercice 13 Inéquation à paramètre

Soit m un nombre réel strictement positif.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante d'inconnue x : $2mx + 3 \geq m$.
2. À quel intervalle doit appartenir m pour que 5 soit solution de l'inéquation ci-dessus ?

Exercice 14 Résolution d'inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

- | | |
|----------------------|---------------------|
| 1. $ x \leq 5$ | 3. $ x + 1 \leq 3$ |
| 2. $ x - 10 \leq 4$ | 4. $ x + 8 < 3$ |

Exercice 15

À quel intervalle appartient le réel x sachant que $|x - 10| \leq 6$.

Exercice 16

Soient I l'intervalle tel que $|x + 1| \leq 8$ et J l'intervalle tel que $|x - 3| \leq 10$. Déterminer $I \cup J$ et $I \cap J$.

Exercice 17

Compléter le tableau suivant.

I	J	$I \cap J$	$I \cup J$
$x \in [-2 ; 8]$	$ x + 1 \leq 6$		
$ x + 2 \leq 4$	$ x - 1 \leq 2$		
$x \in [-6 ; 18]$	$d(x ; -10) \leq 4$		

Exercice 18

Soit x un nombre réel vérifiant $|x - 10| \leq 3$.

1. À quel intervalle appartient le réel $4x - 1$?
2. À quel intervalle appartient le réel $6 - 3x$?

Exercice 19**Raisonnement par l'absurde**

Soient x un nombre rationnel et y un nombre irrationnel.

Montrer en utilisant un raisonnement par l'absurde que $x + y$ est un nombre irrationnel.